概率与统计规律

—评波普尔的概率理论

谭天荣
青岛大学 物理系 青岛 266071

dszhang342009@hotmail.com

内容提要：本文指出：一个事件之所以是随机事件，不是因为它不能预测，而是因为我们发现了某种统计规律，该事件是服从这一统计规律的大量事件中的一个事件；概率计算是从统计的前提得出统计的结论，而不是从“无知”得出“在实践中得到光辉的验证的结论”。[Academia Arena, 2010;2(5):57-64] (ISSN 1553-992X).

关键词：卡尔•波普尔；概率理论；随机事件；统计规律；统计资料

前言

这里是一组批判卡尔•波普尔的概率理论的文章。波普尔是一个精通数理科学的哲学家，他曾经提出概率的倾向性诠释与量子力学的统计系综诠释。然而，正是在数理科学的领域中，他有两次颇为引人注目的败走麦城。一次是在《科学发现的逻辑》一书中，初出茅庐的波普尔试图设计一个违反“测不准原理”的“判决性实验”。当他认识到自己的错误时，有很长一段时间“处于一种失败主义的情绪中”。另一次是功成名就的波普尔预测检验贝尔不等式的实验将得出反驳量子力学的结论，结果却适得其反，使他大吃一惊。诚然，尽管有这种经历，波普尔仍然是二十世纪最卓越的学者之一。但这两次挫折毕竟表明在波普尔的哲学思想特别是他的概率理论有某些问题。问题究竟在什么地方呢？我将这一组文章中进行探讨。

1. 引言

本文将考察波普尔关于随机事件的含义和概率计算的实质的论点。

在《科学研究的逻辑》一书中，波普尔写道：随机事件的特征是一种特殊的不可计算性，这使得人们经过许多次不成功的尝试后倾向于相信，一切已知的理性预测方法用于这些事件必定失败。可以说，我们感觉到除了先知以外没有一个科学家能够预测它们。然而正是这种不可计算性使我们得出这样的结论：概率理论能够应用于这些事件。概率计算使我们从不可计算性达到可计算性（即达到某种计算的可应用性），这一结论有点悖论性质。我们如何解释这个事实：我们可从无知中得出在实践中得到光辉的验证的结论呢？我将这一问题称之为机遇理论的基本问题，甚至频率理论直到现在还不能对这个问题提供一个令人满意的解答。（上面引用的基本上是波普尔的原话，但为了与上下文一致，我不得不稍作词句上的修改。在这种情形下，我不用引号。）下面是我对波普尔的这一论点的评论。

2. 随机事件与统计规律

在日常生活的用语中，我们可以把“事件”分成“必然事件”、“不可能事件”和“随机事件”三种，必然事件是概率为 1 的事件，不可能事件是概率为 0 的事件，而随机事件则是概率大于 0 小于 1 的事件。所谓“机遇理论”或“概率理论”就是考察随机事件的理论。那么，按照这种日常生活的理解，一个事件怎么会是一个随机事件呢？让我们先看一个例子。

掷硬币是典型的随机事件：把一枚硬币一再地随手一掷，这枚硬币一会出现正面，一会出现反面；但是，当掷的次数增多时，出现正面的次数与出现反面的次数将趋于相等；在任意给定的场合，当掷的次数足够多时，就可以认为出现正面的次数与出现反面的次数是相等的（即可以忽略出现正面的次数与出现反面的次数之间的微小差别）。这一经验事实可表成：在大量掷硬币的事件中，硬币出现正面的相对频率是 1/2。在这种意义下，我们说“单次掷一枚硬币，它出现正面”的概率是 1/2。为什么这一事件有确定的概率 1/2 呢？因为有“在大量掷硬币的事件中，硬币出现正面的相对频率是 1/2”这一经验事实，这一经验事实乃是一个统计规律。因此，在这个例子中，统计规律乃是一个事件成其为“随机事件”的前提。

波普尔提到一个类似的例子——掷骰子，他认为‘这一次掷骰子出现 5 点’这一事件之所以是随机事件，是因为掷骰子的结果不能预测。波普尔承认骰子的运动遵循牛顿力学定律，不能预测的是它的初始条件。为了保证掷骰子的结果不能预测，波普尔还特别说到防止我们测量骰子运动的初始条件“游戏规则”。例如骰子必须是均匀的；它必须在一个封闭的容器中“好好摇动”，等等。

如果考虑另一个例子，我们将发现，波普尔的这种

思考诚然细致入微，却不得要领。设想有一位射手练习打靶，他发射的每一发子弹都落在靶上某处。或许，迄今为止还没有人专门研究骰子运动的动力学规律，但子弹的运动的动力学规律——弹道学，却是人们精心研究过的。一颗子弹从发射到落在靶上的运动过程，服从弹道学的规律，这种运动过程似乎不能说是除了先知以外没有一个科学家能够预测的，也不曾有人刻意制订某种游戏规则以保证它的初始条件的不可预测性。但是，一颗子弹落在靶上某处仍然是一个随机事件。为什么呢？这是由于有如下经验事实：如果这位射手连续射击，发射了一千发子弹，每一颗子弹都射在靶上，则一种与弹道学规律迥然不同的另一种规律起作用了。这一千发子弹的落点在靶上形成一种颇为规则的分布。如果这位射手再一次射出一千发子弹，还会形成一个大同小异的分布。

如果我们在靶上给出一个坐标系，使得靶上的一个位置对应坐标(x, 是靶上一个位于(x,σy)，则大量子弹的落点在靶上的分布，可以由一个二元函数 F(x,y) 来描写：如果靶上一共有 N 颗子弹，，则该小区域内的落下的子弹数大致为 n=NF(x,σy)附近的一个足够小的区域，其面积也记作 中的概率为 n/N=F(x,σ。在这种意义下，我们说这位射手射出的单发子弹落在σy) 中是一个随机事件。σ。这个概率既不是 1 也不是 0，而是某一介于 1 与 0 之间的数值。因此我们说这发子弹落在σy)

中是一个随机事件这一结论所表现的不是因为使它偏离靶心的各种因素不能预测，而是因为我们发现了大量子弹落点的统计规律。σ当射手发射子弹时，他瞄准的是靶心，由于眼睛和手的偏差，由于风向或其他干扰，这颗子弹偏离了靶心。诚然，这些导致子弹偏离靶心的上述主观的和客观的因素是难以预测、难以控制的。但是，这发子弹落在

，这是一个统计的结论。我们由此得出一般结论：概率运算是从统计的前提得出统计的结论，而不是从“无知”得出“在实践中得到光辉的验证的结论”。σ中的概率是 F(x,y)σ在这里，概率计算的前提是 F(x,y)这一统计分布函数，这是一个统计的前提，结论是单发子弹落在

波普尔非常关注概率在物理学中的应用，在这里，随机事件的含义与概率运算的实质表现得格外明显。

以分子运动论为例，用 f(v)表示麦克斯韦速率分布函数，a 表示置于某一容器中的气体的一个分子，则事件“分子 a 处于速率间隔[v,v+dv]”的概率是 f(v) dv。如果没有麦克斯韦速率分布函数所表示的统计规律，就根本谈不上 f(v)dv 这一概率，而我们就不会遇到“分子 a 处于速率间隔[v,v+dv]”这一随机事件。分子运动论从这一统计前提导出了许多统计的结论，其中之一是给出气体分子的平均自由程。

吉布斯正则系综是概率在物理学的应用获得极大成功而又没有多少争议的例子。在这里，统计规律表现为一个基本假设，它是描写大量分子的状态分布的函数。加上某些辅助假设，这个函数可导出热力学的全部定律，还能导出某些热力学之外的结论，例如热力学量的涨落。有了这一统计规律，一个由大量分子组成的系统处于某一微观状态才成其为随机事件。在这里，概率运算是从表现为基本假设的统计前提得出种种表现为可以观测到的统计结果。

最后，我们提一下量子力学。以电子衍射过程中单个电子在屏幕上的落点为例，由于迄今为止，我们没有发现单个电子的动力学规律，甚至有没有这样的规律还是一个争论中的问题，因此，“单个电子落在屏幕上某一位置”这一随机事件就显得是“除了先知以外没有一个科学家能够预测的”的事件。或许，波普尔正是在这里引出他这一如此独特的论点。然而，量子力学的应用虽然获得了不容置疑的成功，它的基本概念却还处于剧烈争论的阶段。我们认为，要弄清“随机事件”这样的极为初等的概念的含义，不宜诉诸像量子力学这样过分专门而又处于争论中的科学分支。

3. 随机事件与统计资料

随机事件并不是总以某一统计规律为前提。例如，如果我们说“‘张三得肺结核的概率’是 0.02”，那么，在这一命题有意义的限度内，它是指

第一，张三属于某一人群 G；

第二，人群 G 有 2％的人得了肺结核。

既然“张三得肺结核”这一事件的概率是 0.02，既不是 1 也不是 0，“张三得肺结核”就是一个随机事件。显然，张三是否得肺结核这一问题决不是除了先知以外没有一个科学家能够预测的，我们也从来没有试图对这一问题作过“理性预测”。因此，我们所考察的这一随机事件，更没有波普尔所说的特征。

如果说射手打靶时大量子弹形成规则分布是一个统计规律，那么张三所属的人群得肺结核的比例是 2％就只能说是一种“统计资料”，说不上是什么规律。有时候，概率计算的前提一部分是统计资料，一部分是统计规律。下面，我们举概率论教程中常见的例子。

24。证明如下。–设在市面上流通的某种金币中有百万分之一是假币，这种假币的两面都是正面，而 a 是一枚这样的金币，若一再地把 a 随手一掷，一连出现 100 次正面，则它以后会出现反面的概率为 10

令 A 表示“a 是假币”，B 表示表示“a 是真币”，则 A 与 B 的概率分别为：

6；–Pr(A)=10 6。– Pr(B)=1-10

如果 a 是假币，则每次掷它只能出现正面，从而它一连出现 100 次正面的概率为 1。如果 a 是真币，

则它出现正面的概率为 1/2，从而一连出现 100 次正面的概率为(1/2)100。用 C 表示“a 一连出现 100 次正面”，则上面的结果表成：
Pr(C|A)=1； Pr(C|B)=(1/2)100。
a 一连出现 100 次正面之后，它是真币的概率表成 Pr(B|C)，根据 Bayes 公式，有：
Pr(C|B)=Pr(B)•Pr(C|B)
24–6)×(1/2)100≈10–6×1+(1-10–6)×(1/2)100
10–Pr(A)•Pr(C|A)+Pr(B)•Pr(C|B)=(1-10 。
24。–当且仅当 a 是真币时，它有可能出现反面，因此，a 在第 100 次出现正面之后还出现反面的概率是 10
上面的计算有两个大前提：
第一，某一金币集合有百万分之一是假币，其两面都是正面。
第二，将一枚真的金币随手一掷，出现正面的概率是 1/2。
在这里，第一个前提则是统计资料，第二个前提则是统计规律。从这两个前提我们几乎可以肯定，如果 a 一连掷 100 次都出现正面，则它一定是假币，从而几乎可以肯定，以后再掷这枚金币，只会出现正面，不会出现反面。这个结论肯定会得到证实，或许，它可以算得上是波普尔说的从概率计算“得出在实践中得到光辉的验证的结论”的例子。但是，这一结论的前提并不是“无知”，而是上述统计资料与统计规律。诚然，从统计资料与统计规律只能得出具有统计性质的结论，即得出由概率表示的结论。但是，当某些概率非常接近 1 或 0 时，就能对单个事件作出“几乎肯定”的预测。

4. 随机运动与规则运动
在《科学发现的逻辑》一书的《定律与机遇》一节中，波普尔写道：
“人们有时听说，行星的运动服从严格的定律，而一粒骰子的掷下是碰运气，或受机遇支配。我认为区别在于这个事实：迄今我们已能成功地预测行星的运动，但还不能预测掷骰子的个别结果。”
下面，我们把波普尔这里说的服从严格的定律的运动称为“规则运动”，而把受机遇支配的运动称为“随机运动”。行星的运动是规则运动，而一颗骰子的运动则是随机运动。波普尔认为，区别在于规则运动是可以预测的，而随机运动则是不可预测的。波普尔承认，这种划分有一定的主观性，例如，“可以设想，仪器设备精良的物理学家，能观测其它人预测不到的一次掷骰子的结果。”
波普尔还说：“与这种主观观点相反，人们有时支持一种客观的观点。就这种观点利用事件本身是指决定的还是不决定的这种形而上学观念而言。”
下面，我们提出第三种划分标准。
还是以射手打靶为例，单颗子弹的运动服从牛顿力学定律，从而是规则运动。但是，大量子弹的运动服从运动统计规律，在这种意义下，单颗子弹的运动却是随机运动。因此，单颗子弹的运动既是规则运动又是随机运动。
当我们考察气体的大量分子的运动的统计规律时，单个分子的运动就是随机运动。但是，在经典统计力学的前提下，单个分子的运动服从牛顿力学的动力学定律，在这种意义下，它的运动是规则运动。另一方面，人们或许都承认天体的运动是规则运动，但是，当我们考察例如一个像银河系这样的包括千百万个天体的“宇宙岛”的整体运动的统计规律时，单个天体的运动就是一种随机运动了。因此，单个分子的运动和单个天体的运动都既是规则运动又是随机运动。
现在，我们用另一种用语表达上面的结论。无论是分子，天体还是子弹的运动，都服从严格的动力学规律，在这种意义下，它们的运动是规则运动。但是，当我们考察大量分子、大量天体或大量子弹的统计规律时，单个分子、单个天体或单颗子弹的运动就成了随机运动。或者说，它们的运动具有随机性。由此我们得出结论，随机性并不是某种运动的固有属性；它是一种相对统计规律而言的性质，一种满足动力学规律的规则运动，相对于统计规律就成了随机运动，正如单个事件相对于大量事件的统计规律就成了随机事件一样。

5. 热寂说
物理学史上许多疑难，与人们把随机运动看作某种运动的固有属性有关，所谓“热寂说”就是其中之一。热寂说的疑难可以追溯到亚历斯多德的时代，按照亚历斯多德的物理学，万物之所以运动，是因为它们都有走向自己的“自然位置”的趋向。人们难免会问，有朝一日万物都达到了自己的自然位置，这个世界不就静止下来了吗？热寂说只不过在新条件下，用新的用语提出了这一古老的问题。
在《自然辩证法》一书的《导言》中，恩格斯这样提出了热寂说的疑难：
“……地球，一个像月球一样的死寂的冷冻了的球体，将在深深的黑暗历沿着愈来愈狭小的轨道围绕着同样死寂的太阳旋转，最后就落到它上面。其他行星也将遭到同样的命运，有的比地球早些，有的比地球迟些；代替安排得和谐的、光明的、温暖的太阳系的，只是一个冷的、死了的球体在宇宙空间里循着自己的孤寂的道路行走着。我们的太阳系所遭遇的命运，我们的宇宙岛的其他一切星系或早或迟地都要遭遇到，其他一切无数的宇宙岛的星系都要遭遇到……
“但是，当这样一个太阳系完成了自己的生命行程并且遭遇到一切有限物的命运，即死亡的时候，以后又怎么样呢？”

这里，恩格斯所描写的太阳系的末日，是当时人们的认识，现在人们已经有了不同的认识：太阳系确实有自己的末日，但不是这样的末日。这一点并不重要，重要的是顺着恩格斯的思路，似乎可以得出如下结论：

第一， 我们的宇宙岛的每一颗恒星都是有限物，从而都会死亡。

第二， 我们的宇宙岛也是一个有限物，它也会死亡。

第三， 当我们的宇宙岛的每一颗恒星都死亡时，我们的宇宙岛的末日就来到了。

这些结论对不对呢？

我们知道，单个原子总是倾向于从激发态转移到基态。如果一个原子处于寂静的天空，它或许可以在某一激发态滞留几百天，但终究会达到基态，以后只要没有外界干扰，它就会永远滞留在基态。用亚历斯多德的话来说，基态乃是原子的自然位置，原子总是倾向于走向自己的这一自然位置，这是一种不可逆的进程。另一方面，如果大量相同的单原子分子形成气体，则这些原子的状态会倾向于某种分布，这种分布乃是气体的自然位置，这又是一种不可逆的进程。这里有一个明显的事实：当这种气体达到自然位置即达到它的平衡状态时，它的诸原子的状态分布并不是每一个都处于基态。

现在我们转向天体，像太阳这样的恒星的演化有一定方向，它们最终要演化成为白矮星或中子星这样的星体残核。这种星体残核乃是恒星的演化的自然位置。另一方面，像银河系这样的“宇宙岛”，其诸恒星的状态会倾向于某种分布，这种分布乃是该宇宙岛的自然位置。同样明显的事实是：当一个宇宙岛达到平衡状态时，它的诸恒星的状态分布并不是每一个都成为星体残核。

从上述事实我们得出一个结论，在另一个地方，恩格斯已经给出了这一结论。他提出了如下命题：

“个别运动趋向于平衡，而整体运动又破坏了个别的平衡。”

他只是忘了补充一句：“整体运动破坏个别的平衡，是为了达到整体的平衡。”

例如，气体中的每一个原子趋向于达到基态，但气体为了达到整体的平衡，即它的诸原子达到与气体的平衡状态相对应的状态分布，不得不破坏每一个原子都走向基态的趋向。同样，我们“宇宙岛”的每一颗恒星趋向于走向星体残核，但宇宙岛为了达到整体的平衡，即它的诸恒星达到与宇宙岛的平衡状态相对应的状态分布，不得不破坏每一颗恒星走向星体残核的趋向。

热寂说可以表述为：“整个宇宙将达到其自然位置”。但我们已经看到，宇宙分为一些层次，它的各个层次各有其自然位置，甚至两个相邻的层次也没有共同的自然位置，因此不可能有“整个宇宙的自然位置”。

那么，热力学第二定律所表述的不可逆性是不是适用于“整个宇宙”呢？宇宙的各个层次走向其自然位置的趋向都是一种不可逆性。热力学第二定律所表述的不可逆性适用于从气体的诸原子走向对应于气体平衡状态的状态分布到恒星走向星体残核这一广阔领域（这个领域可以用玻尔兹曼常量来表征）的一切过程。但它不能描写单个原子走向基态的不可逆趋向，也不能描写银河系诸恒星走向对应于整个宇宙岛的平衡状态的状态分布的不可能趋向。因此，热力学第二定律所表述的不可逆性不适用于“整个宇宙”。

综上所述，我们得出结论：宇宙的每一个层次都在走向自然位置，但各个层次走向自然位置的不可逆趋向相互冲突、相互制约，因此任何一个层次都不可能一直滞留在自然位置。

6. 波普尔的无人岛

在《科学研究的逻辑》一书的《对量子论的若干意见》这一章的开头，波普尔写道：

“我们对概率论的分析，已使我们掌握一些工具，我们现在可通过应用它们于现代科学一个主要问题来检验它们；并且我将借它们之助试图分析和澄清现代量子论若干更为模糊不清的论点。

“我用哲学或逻辑方法解决物理学中心问题之一的有点大胆的尝试，必定会引起物理学家的怀疑。我承认他们的怀疑是正当的，他们的怀疑是有充分根据的，然而我希望我也许能够克服他们。同时，值得注意的是在每门科学分支中，成堆的问题主要是逻辑的。量子物理学家一直渴望参与认识论讨论，这是事实。这提示他们本身感到量子论中某些仍未解决的问题的解法不得不在逻辑与物理学之间的无人岛上寻找。”

在这里，波普尔提出了三个论点：

第一， 物理学的每个分支都有成堆的问题；

第二， 这些问题主要是逻辑的，其解法不得不在逻辑与物理学之间的无人岛上寻找；

第三， 概率理论是解决这些问题的主要工具。

关于这里的第三个论点，波普尔在《无尽的探索》一书中明确断言：“量子力学的诠释问题都可以追溯到概率计算的诠释问题。”他还给出了如下两个著名的结论：第一，海森堡原理是统计学的离散关系；第二，“波包收缩”是一种普遍的概率效应。这些结论我们将在以后逐一考察。

热寂说无疑是波普尔说的“成堆的问题”中的一个，而且这个问题确实主要是逻辑的，我们上面的解法确实也是在逻辑与物理学之间的无人岛上找到的。但是，物理学各分支中的问题更多是数学和物理学方

面的。在本文的附录中，我在分子运动论和系综理论中，各举一个这种问题例子。

7. 几句题外的话

我想，只要有足够的耐心，每一个物理系的本科生都不难看懂附录中的内容。这并不需要高深的数学，也不要什么前沿的物理学知识。但请不要走极端，以为其中只有加减乘除，只有牛顿第二定律。不，你必须学过统计物理学，而且学得比较认真，还有一个条件，你不要指望读完这篇文章能得到什么“收益”。

如果你确实看懂了附录中的这两个例子，而你又没有过多的偏见，就肯定会得出结论：前人确实在我所考虑的问题上有所疏忽，我确实解决了两个微不足道的历史遗留问题。但在欣赏之余，你难免会为我惋惜，有这功夫怎么不去研究几个前沿的问题，搞这些陈谷子烂芝麻的东西有什么意思？如果你早年不把时间浪费在这种问题上，而是及早奔赴前沿，你就不会像今天这个样子了。

问题就在这里！稍稍有点才能的人都不屑于作我所作的工作。一代又一代的物理学家都匆匆赶往前沿，一路留下了太多由于疏忽而造成的错误，留下了太多由于错误而造成的疑难，留下了太多为解决这些疑难而建立的新学说、新理论、新体系和不可思议的“新颖观念”。

分子运动论和系综理论无疑是经典物理学的重要组成部分，我们在这里指出这两个错误是因为它们恰好与本节考察的概率与统计规律的问题有关。不幸的是，物理学的每一个领域都有类似的错误，而且这些错误已经积累了好几个世纪。这些错误有些从来没有人觉察过（例如，气体分子有两种平均自由程），一些曾经一度困扰过当时的物理学家（例如，压强涨落问题），但现在已经被人遗忘，再也无人理睬。不幸的是，这些错误不会因为你未察觉或不理睬而安安静静地沉睡，它们在成长，它们在繁殖，它们在变异，所有这些错误现在已经聚积为一个整体，形成了物理学机体上的恶性肿瘤。十九世纪末叶以来一次又一次的物理学危机就是这一恶性肿瘤的确定无疑的症状。

因此，我完全同意波普尔关于物理学的每个分支都有成堆的问题的结论，但我认为实际情况比波普尔说的还要严重得多，而且这些问题远不是在波普尔的无人岛上能解决的。

我写这组文章批判波普尔，不是因为波普尔与我分歧最多，而是恰好相反，是因为对于物理学的现状和概率与物理学的关系等问题，我与波普尔的观点最接近。在批判波普尔时，我将以波普尔的观点为起点阐述自己的观点，这是一条事半功倍的途径。另一方面，我选择这位鼎鼎大名的西方学者为对手，也是为了使别人能注意到我这无名小卒。

附录

附录 1 气体分子的两种自由程

在分子运动论发展初期，有人提出异议：按照这个理论，分子应该具有每秒数百米的速率，而事实上气体的扩散却缓慢得多。为了解决这一矛盾，人们引进了气体分子的平均自由程的概念。当麦克斯韦的速率分布函数已经给出以后，用这个函数来计算这个平均自由程应该说是分子运动论的最基本、最主要的工作之一。可是在这里，人们却遇到了问题。这问题不是得不到自由程的平均值，而是先后得出两个平均自由程的表达式：一个称为麦克斯韦自由程，另一个称为泰特自由程。这样，这两个表达式到底哪一个是真正的平均自由程就成了问题。下面我们给出这两种自由程的表达式，并阐明其含义。

vf(v)dv。现在我们证明，这个平均速率也是单个分子在一段足够长的时间内的速率的平均值。

∞0+∫=⟩v⟨设容器 V 中盛有某种纯气体，有 N 个分子，已经达到热平衡。在某一时刻，气体中的 N 个分子有各式各样的速率，用 f(v)表示麦克斯韦速率分布函数，则这些分子的平均速率为

，由于气体达到了平衡，全体气体分子的平均速率在任一∗观察某一分子 a，设它在一段足够长的时间 T 内飞过的总路程为 L，则其速率的长时间平均值为 L/T。现在考虑全体气体分子的长时间平均值 v 是全体气体分子在观察时刻的平均速率。⟩v⟨T，这里，⟩v⟨=L/T。由此我们得出结论，分子 a 在时间 T 内飞过的总路程为 L=⟩v⟨=L/T，于是∗。另一方面，每个分子的长时间平均值是一样的，因此，v⟩v⟨=∗时刻是一样的，因此，v

把速率分成一些间隔，其中第 k 个间隔的速率约为 vk，我们把速率在这一间隔内的分子称为 vk 分子。设在容器中的 N 个分子中，在 t=0 时刻有 Nk 个 vk 分子；在时间间隔(0,)内，vk 分子与其他分子碰撞了 Mk 次。一个 vk 分子与其他分子碰撞过之后，一般就不再是 vk 分子，因此，在时间间隔(0,τ)内，一个 vk 分子最多只能与其他分子碰撞一次。但有可能某一分子在 t=0 时刻不是 vk 分子，在时间间隔(0,τ 足够小，则这种第二次碰撞的贡献可以忽略。这样，Mk 是 t=0 时刻的 vk 分子在时间间隔(0,τ)内经过碰撞变成了 vk 分子，然后又经历一次碰撞，这第二次碰撞将对 Mk 作出贡献。如果τ)内与其他分子碰撞的次数。因此比值 Mk/Nk 小于 1。这个比值称为单个 vk 分子在时间间隔(0,τ 则称为单个 vk 分子的可几碰撞频率。用 p 表示一个 vk 分子在时间间隔(0,τk=Mk/Nkω)内的可几碰撞次数；τ)内与其他分子碰撞的概率，则有τ

0=Nkp·p)–1+Nk(1·Mk=Nkp

=Mk/Nk=p 乃是单个 vk 分子在时间间隔(0,τkω于是)

内与其他分子碰撞的概率。τ
在时间间隔(0, 次。T⟩vω⟨vf(v)dv。同样可以证明，每一个分子在长时间 T 内碰撞了ω∞0+∫=⟩vω⟨表示单个分子的可几碰撞频率，则有⟩vω⟨v 表示速率为 v 的分子的可几碰撞频率，ωk/N，它是各种速率的分子的可几碰撞频率的平均值。如果速率间隔分得无限细，这个求和过渡到积分，用ωkNk∑，从而单个分子的可几碰撞频率是τkωkNk∑kMk=∑)内，N 个分子的总碰撞次数是τ
M 乃是单个分子的自由程的长时间平均值，也是全体气体分子的自由程的平均值。这个平均值就是麦克斯韦自由程。λ 。在分子运动论中，一个分子在两次碰撞之间飞过的平均路程称为"自由程"。因此，⟩vω⟨/⟩v⟨M=λ次。平均地说，它在两次碰撞之间飞过的路程为T⟩vω⟨，与其他分子碰撞了T⟩v⟨于是，分子 a 在时间 T 内飞过的总路程为 L=
现在考虑另一种路程的平均值。
令 G(x)表示我们所观察的气体中的一个速率为 v 的分子从观察时刻起飞过了路程 x 尚未与其他分子碰撞的概率。由于气体已经达到平衡，这个概率与观察时刻无关。设 a 是某一分子，在 t=0 时刻速率为 v，考虑如下三个事件：
A：a 从 t=0 时刻起，飞过了路程 x 尚未被碰。
B：a 从 t=0 时刻起，飞过了路程 x+y 尚未被碰。
C：a 从 t=x/v 时刻起，飞过了路程 y 尚未被碰。
C，从而·根据定义，事件 A 的概率 Pr(A)=G(x)；事件 B 的概率 Pr(B)=G(x+y)；如果已知条件 A 成立，则 C 事件的概率 Pr(C|A)=G(y)。显然，B=A
Pr(C|A)，·C)=Pr(A)·Pr(B)=Pr(A
即
G(y)。·G(x+y)=G(x)
是待定常量。αx，其中α不难解出，G(x)=e
把一个分子从观察时刻起到第一次与其他分子碰撞为止飞过的路程称为"自由前程"。则事件 A 可表成："以 t=0 为观察时刻，a 的自由前程大于 x。"考虑事件：
D：以 t=0 为观察时刻，a 的自由前程大于 x，但不大于 x+dx。
按照定义，事件 D 的概率
αPr(D)=G(x)-G(x+dx)=-G'(x)dx=- x dx。αe
v 的定义，它在时间间隔(0,ωvdt。另一方面，根据α取 x=0，dx=vdt，则上式给出结论：a 在时间间隔(0, dt)中被碰的概率是- vω=-αv dt。于是，ωdt)中被碰的概率是 /v。
v。ω=v/αv=-1/λxPr(D)。将上式代入，得到
∞0+∫v=λv 称为单个速率为 v 的分子的可几自由前程。根据定义，λ由于诸分子无规则运动，同样是速率为 v 的分子，其自由前程是各式各样的。这些自由前程的平均值

全体气体分子的平均自由前程是各种速率的平均自由前程的平均值：
vf(v)dv。ωv—∞0+∫=⟩vωv/⟨=⟩vλ⟨T=λ
这个平均自由前程就是泰特自由程。
v。但不适用于全体气体分子的平均值。ωv=v/λ似乎不曾有人明确区分自由程与自由前程两个概念，但显然已经有人看到，在考虑气体扩散的快慢时，起作用的是自由程的概念；而分子射线实验所测量的平均路程，则是平均自由前程。伯克利的《统计物理》一书甚至把这里的自由前程作为自由程的定义。妨碍人们意识到这两种路程有不同平均值的或许是如下事实：既然气体已经达到平衡，一个分子的可几自由前程与观察时刻无关，因此如果一个分子在观察时刻刚刚碰过一次，则它的自由前程与就是它的自由程。于是自由程与自由前程应该有相同的平均值。这种想法对于给定速率的分子的平均值是正确的：速率为 v 的分子的平均自由程和平均自由前程都是
,τ–是一个正的无穷小量，则在时间间隔[τ全体气体分子的平均自由程乃是如下分子集合的平均自由前程。它的每一个分子在观察时刻刚刚碰过一次，其速率则是随机的。这个分子集合的速率分布函数却不再是 f(v)。设 (v)=ϕ成正比。从这个表达式可得出归一化速率分布函数 f(v)dvτvω0]碰过一次并且速率间隔[v,v+dv]中的分子集合的分子数与 f(v)。这样，在观察时刻刚刚碰过一次的分子的平均自由前程应该是⟩vω⟨v——ω
(v)dv。ϕvωv—∞0+∫M=λ
于是我们再次得出结论，全体气体分子的平均自由程是麦克斯韦自由程。
我们看到，麦克斯韦自由程与泰特自由程原是不同物理量的平均值，却被理解为同一物理量的不同的平均值。人们甚至还说，泰特自由程是比麦克斯韦自由程更精确的平均值。这虽然只是一个微不足道的误解，但迄今为止从来没有人弄清过。
附录 2 压强的涨落公式
吉布斯的系综理论把一个热力学体系看作一个力学系统。若它有 n 个自由度，则其状态由 2n 个正则变量，即由 n 个广义坐标和 n 个对应的广义动量组成的 2n 维数组
(q, p)=(q1,…,qn; p1,…,pn)
来描述，状态随时间的变化满足哈密顿方程。除正则变量以外，哈密顿方程中的哈密顿函数中的宗量还有一组"外参量"，它们是热力学中的广义坐标。如果系统的体积 V 是唯一的外参量，则哈密顿函数表成 H(q, p; V)。
正则变量(q,p)也称为"相变量"，任一函数 f(q, p; V)称为"相函数"，吉布斯的系综理论把热力学量看作某一相函数的平均值，特别是，内能是哈密顿函数的平均值，压强是哈密顿函数对 V 的偏导数的平均

值：
；⟩H⟨U= 。⟩V)qp∂H——∂-(⟨P=
系综理论不仅能得出热力学的基本方程，而且还能得出热力学量的"涨落公式"。我想不会有人否认，给出压强涨落的表达式是系综理论的一个最基本、最主要的工作之一。然而偏偏在这一工作中，人们遇到了意外的挫折。
V)qp 是压强的微观值或"微观压强"。由此可得到压强的涨落表达式：∂H——∂从上述压强的表达式自然得出结论：相函数-(
V2)qp]∂2H——∂V)T＋(∂P——∂D(P)=kT[(
从吉布斯开始，人们从这一公式总是得出令人烦恼的结论。例如，著名的物理学家 R. H. Fowler 把这一公式应用于如下实例：设容器中盛有 N 个相同的单原子分子组成的理想气体，则单个分子的哈密顿函数为
=1——2m(ε (x,y,z)。Φ+ px2+py2+pz2)
(x,y,z)是如下势函数：当(x, y, z)在容器中时为 0，当(x, y,Φ其中 。气体的哈密顿函数是 N 个单个分子的哈密顿函数之和。这个函数对 V 的偏导数时，要求对壁势求导。但根据定义，壁势的导数没有意义。Fowler 把壁势改成某一陡峭的连续函数，并从它计算出结论：气体压强的涨落与容器的性能有关，这是一个很费解的结论。εz)在容器外时为无穷大，它表示分子不能离开容器。这个函数可以用一个叫"壁势"的一元函数来表示，这个壁势函数还把容器的体积 V 作为外参量引进哈密顿函数
另一方面，涨落还可以用"准热力学方法"计算，在与正则系综相同的前提下，"准热力学方法"给出压强的涨落公式为
V)S]。∂P——∂V)T-(∂P——∂D(P)=kT[(
Fowler 得出的结论与用准热力学方法得出的结论也不一致。
按理说，从系综理论应该可以得出准热力学方法的涨落公式，但对于这一令人望而生畏的任务，前人似乎都不敢问津。著名的前苏联物理学家兰道，为物理学写了一套百科全书式的教程。看来，对这一问题他也力不从心。他用"准热力学方法"计算了各种物理量的涨落，也用系综理论计算了某些物理量的涨落，唯独回避了从系综理论得出压强涨落的计算。难能可贵的是，我国物理学家王竹溪明确提出了这一问题，并承认这个问题还没有令人满意的解答。
在这里，人们忽略了一个细节：如果通过变换 q*=q*(q, (q, p; V)，可得到对应的哈密顿函数 H*=H*(q*, p*;∗V)取另一组广义坐标，并取与之对应的广义动量 p*=p V)qp 具有相同的平均值，但它们本身却并不相等，从而它们不可能都是压强的微观值。因此，从压强的平均值表达式我们只能得出结论：存在一组正则变量(q,∂H—∂V)q*p*与-(∂H*——∂V)q*p*。不难证明，虽然两个相函数-(∂H*——∂V)，还可得到对应的偏导数-(V)qp 是压强的微观值。我们把这样的正则变量称为关于外参量 V 的"特征相变量"。问题在于，在一定的场合，相变量往往是已经给定的，我们怎么知道它是不是特征相变量呢？下面我们提供一个判据。∂H——∂p)，使得-(
设系统的熵函数为 S=S(P, V)，则系统的宏观态也可以由(S, V)来描写。设宏观态(S, V)对应一个正则系综，它有 m 个微观系统，在观察时刻，其中的第 k 个微观系统的状态为(qk, pk; k 从 0 至 m 取和。若 V1 与 V 足够接近，则近似地有∑kH(qk,pk;V)，其中∑V)，则系统的内能作为哈密顿函数的平均值表成
U(S,V)=1—m
V)qp∂H——∂(=H(qk, pk; V1)-H(qk, pk; V)————————————————————V1-V。
V)S 可表成∂U——∂另一方面，热力学关系 P=-(
U(S, V1)-U(S, P(S, V)=- V)——————————————
V1-V。
kH(qk, pk;∑kf(qk, pk; V)和 U(S, V)=1—m∑考虑到
P(S, V)=1—m V)，从上式两式可得到
kH(qk, pk; V1)，∑U(S, V1)=1—m
这一结果暗示：m 个微观态
(q1, p1; V1), (q2, p2; V1), ……(qm, pm; V1)
形成对应于宏观态(S,V1)的正则系综。根据这一暗示，我们提出如下判据：
判据 1：(q, p)是关于 V 的特征相变量的必要充分条件是：如果将宏观态(S,V)的正则系综中的每一个微观态(q, p; V)换成(q, p; V1)，则得到对应于宏观态(S,V1)的正则系综。
设 w(q, p; V)是某一相函数，其系综平均值是 W(S,V)，则当 V1 与 V 足够接近时，有
V)S=W(S, V1)-W(S,∂W——∂(V)——————————V1-V。
另一方面，若(q, p)是 V 特征相变量，m 个微观态(qk,pk;V)是对应于宏观态(S,V)的正则系综，则根据判据 1，m 个微观态(qk,pk;V1)形成对应于宏观态(S,V1)的正则系综。这样，我们有
W(S, kw(qk,pk;V)； W(S,∑V)=1—m
kw(qk,pk;V1)。∑V1)=1—m
代入上式，得到
kw(qk, pk; V1)-w(qk, pk;∑V)S=∂W——∂(V)————————————————————V1-V。
V)qp 的平均值，于是有∂w——∂右边正是偏导数(
。⟩V)qp∂w——∂(⟨V)S=∂W——∂(
。于是，我们从正则系综的压强涨落公式过渡到准热力学方法的压强涨落公式。⟩V2)qp∂2H——∂-(⟨V)S=∂P——∂V)qp，得(∂H——∂；取 w=(⟩V)qp∂H——∂(⟨V)S=∂U——∂取 w=H，得到(
在 Fowler 的上述计算中，(x, y, z)是固定在地面上

的坐标系的坐标，气体的哈密顿函数中的相变量是由这种坐标给出的。根据判据 1 可以得出结论：对于 V 的特征相变量不是这组相变量而是取固定在容器上的"活动坐标系"得到另一组相变量，对于后一组相变量，外参量 V 不是出现在势能而是出现在动能的表达式中，这时很容易计算出压强的相对涨落，并得出与准热力学方法一致的结论。

至此，正则系综的压强涨落问题已经彻底解决。可惜的是，已经晚了一点。当代的物理学家们早已把这个问题忘了。一代又一代的物理学家都匆匆赶赴前沿阵地攻克新的课题，一路留下了太多没有弄清的问题，这又是其中的一个。

Probabilities and Statistical Laws

——A Comment on Popper's Interpretation for Probability

TAN Tianrong

(Department of Physics, Qingdao University, Qingdao 266071, P.R.China.)

dszhang342009@hotmail.com

Abstract: It is pointed that the reason why an event is a stochastic event because that a certain statistic law about a great lot of events has been found and the very event is one of them, instead of because it is impossible of calculation; also, the essence of probabilistic calculations is reaching statistic conclusions form statistic promises instead of from "ignorance" to obtain results which is gloriously verified by practices. [Academia Arena, 2010;2(5):57-64] (ISSN 1553-992X).

Key words: Karl • Popper; theory of probabilities; stochastic events; statistic laws; statistic data