洛伦兹变换的思考

Li Xusheng

1922538071@qq.com

Abstract: 19世纪80年代初，当普朗克(M. Planck，1859~1947)表示决心献身理论物理学时，他的老师、著名的德国实验物理学家约利(P. von Jolly, 1809~1884)规劝他说："年轻人．你为什么要断送自己的前途呢?要知道，理论物理学已经终结，微分方程已经确立，它的解法已经制定，可供计算的只是个别特殊的情况．可是，把自己的一生献给这一事业，值得吗?" 1894年，赫兹甚至在批评牛顿力学有关基本概念的著作中还坚持认为："把一切自然现象还原为简单的力学定律是物理学的课题，在这一点上，所有的物理学家都是一致的．" 热力学第二定律的不可逆性同牛顿力学的可逆性相对立．虽然热力学第二定律的统计解释表明可以从力学定律导出热现象的不可逆性，但它引入了与牛顿力学规律的确定性相对立的统计规律；同时统计力学的各态历经假说根本不能归结为力学原理．另外，统计力学中的能量均分定理不能适用于具有无限传播的结论，也同引力的瞬时超距作用相对立．此外，麦克斯韦（1831～1879）的电磁场方程和伽利略（1564～1642）的相对性原理不协调，电磁现象领域中质量和电动力的速度相关也同牛顿力学的质量和力的速度无关相矛盾．

[Li X. 洛伦兹变换的思考． *Academ Arena* 2014;6(12):66-94]. (ISSN 1553-992X). http://www.sciencepub.net/academia. 10

Keywords: 物理学; 力学; 因果;分析;数学; 方法

1、狭义相对论产生的背景

19世纪80年代初，当普朗克(M. Planck，1859~1947)表示决心献身理论物理学时，他的老师、著名的德国实验物理学家约利(P. von Jolly, 1809~1884)规劝他说："年轻人．你为什么要断送自己的前途呢? 要知道，理论物理学已经终结，微分方程已经确立，它的解法已经制定，可供计算的只是个别特殊的情况．可是，把自己的一生献给这一事业，值得吗?" 1894年，赫兹甚至在批评牛顿力学有关基本概念的著作中还坚持认为:"把一切自然现象还原为简单的力学定律是物理学的课题，在这一点上，所有的物理学家都是一致的．" 热力学第二定律的不可逆性同牛顿力学的可逆性相对立．虽然热力学第二定律的统计解释表明可以从力学定律导出热现象的不可逆性，但它引入了与牛顿力学规律的确定性相对立的统计规律；同时统计力学的各态历经假说根本不能归结为力学原理．另外，统计力学中的能量均分定理不能适用于具有无限传播的结论，也同引力的瞬时超距作用相对立．此外，麦克斯韦（1831～1879）的电磁场方程和伽利略（1564～1642）的相对性原理不协调，电磁现象领域中质量和电动力的速度相关也同牛顿力学的质量和力的速度无关相矛盾．

（一）、 洛仑兹的收缩假说

声名卓著的开尔芬十分热衷于构造以太的力学模型，他在 1884 年宣称："在我没有给一种事物建立起一个力学模型，我是永远也不会满足的．"迈克尔逊—莫雷实验的"零结果"在最初人们并没有因此否定静止以太的存在，反而认为是实验可能失败了，或力图对实验结果作出种种解释．其中最具代表性的理论假说是荷兰物理学家洛仑兹的收缩假说．

1．洛仑兹(H. A. Lorenzt)的贡献

1853 年 7 月生于荷兰．1870 年考入莱顿大学，主攻数学、物理学和天文学，1875 年 12 月获得博士学位，1877 年被乌得勒支大学聘为数学教授，同年莱顿大学授予他荷兰唯一的理论物理学教授席位（24 岁）．1912 年洛仑兹辞去莱顿大学教授职务，去政府部门任高等教育部部长．他创立了电子论，首次把以太和普通物质分开，1895 年提出著名的洛仑兹力公式．他将经典电磁场理论发展到了最后的高度，为相对论的诞生创造了条件．他因其电子论对塞曼效应进行了定量解释，与塞曼分享了 1902 年诺贝尔物理学奖．洛仑兹在世纪之交虽然积极参与了物理学的几个前沿领域，却极力设法修补旧理论，总想在不触犯经典理论框架的前提下把力学和电动力学调节器和起来．但是，1887 年迈克尔逊实验否定了为电磁理论所要求的菲涅耳的静止以太说，使电磁力学的基础受到了冲击．洛仑兹为此而郁郁不乐，他于 1892 年写信给瑞利说："我现在简直不知道怎样才能摆脱这个矛盾．不过我仍然相信，如果我们不得不抛弃菲涅耳的理论，………我们就根本不会有一个合适的理论了"．………．直到晚年，他还认为以太是具有一定优点的概念．

2．长度收缩假说的提出

1892 年 11 月洛仑兹发表了《论地球对以太的相对运动》，用长度收缩假说解释了迈克尔逊—莫雷实验．他认为运动物体在其运动方向上的收缩，抵消了地球在以太中运行所造成的光程差，所以观察不到

预期的条纹移动.他写到："我终于想出唯一的方法来调和它与菲涅耳的理论：连接一个固体上的两点连线，如果开始平行于地球运动的方向，当它转过90℃后就不能保持原来的长度.如果令后一个位置的长度为L，则前一个位置的长度为L(1-α)."其中α=v2/2c2 .1895年洛仑兹给出了更精确的长度收缩系数为

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

，洛仑兹一直认为这种收缩是真实的，是由分子运动引起的.

3. 一级近似的解释及地方时

洛仑兹的上述收缩假说只涉及到 v^2/c^2 的这种二级近似.1895年，洛仑兹发表了《运动物体中电磁现象和光现象的理论研究》，提出了地方时概念，他对麦克斯韦方程组施加了一种变换.其中时间 t 变为"当地时间" t′=t-(v/c2)x，电场E变换为E′=E+v×B/c，磁场B变换为B′=B-v×E/c，结果发现麦克斯韦电磁场方程组的形式不变.由此证明其收缩假说可以准确到 v/c 一阶范围.这样就解释了迈克尔逊—莫雷实验.

"当地时间"t'=t-(v/c^2)x，指在物体上的测得的时间，它与坐标系的平移速度有关.它表明，好象在运动坐标系上的时钟走慢了.洛仑兹认为地方时只不过是一个数学假设，不具有真实的物理意义，而牛顿力学中的绝对时间才是唯一真实的时间.与此相反，爱因斯坦认为不存在所谓的绝对时间，地方时才是唯一真实的时间.

4．实验验证的失败

①按照洛仑兹的长度收缩假说，物体的密度在不同的方向上会有所不同，这样光通过它时会产生双折射.1902年瑞利、1904年布雷斯先后进行了实验，未发现双折射现象.

②根据洛仑兹理论，若电容器的极板与地球的运动方向成一夹角，当电容器充电时，其极板会受到一转动力偶矩的作用，1903年特劳顿和诺布尔作了实验，结果也是否定的.这些实验都是二阶效应，说明在二阶近似的条件下，也发现不了地球运动对电磁现象的影响，仅用"长度收缩"假说难以说明问题.

（二）彭加勒的观点

洛仑兹认为，上述变换中的t'、E'、B'都不是真实的物理量，只是某种辅助量.另外，一级近似下的解释采用了一种对速度v线性相关的变换不变性，而二级近似下的解释，则完全撇开这种不变性，需要再回到伽利落变换，再引进收缩假说.这种人为性和逻辑上的不自洽性，使这套理论显的很不自然.

法国科学家彭加勒批评说："如果为了解释迈克尔逊—莫雷实验的否定结果，需要引进新的假说，那么每当出现新的实验事实时，同样也发生这种需要.无疑的，对每一个新的实验结果创立一种假说这种做法是不自然的."洛仑兹接受了这种批评，希望"能够利用某些基本假定，并且不用忽略这种数量级或那种数量级的量，来证明许多电磁作用都完全与系统的运动无关". 彭加勒(J.H.Poincare)①1895年对洛仑兹的"长度收缩"假说的批评.

②1905年发表论文《论电子动力学》，给洛仑兹理论以更简洁的形式，并将其时空变换命名为洛仑兹变换.

③1898年发表论文《时间的测量》，首次提出光速在真空中不变的公设，认为没有这一公设，就无法测量光速；在论文中还讨论了用交换光信号来确定异地同时性的实验方法.

④1899年彭加勒就认为绝对运动是不存在的，只有相对运动才有意义.

⑤1902年在出版的《科学与假设》中提出"相对运动原理"："任何系统的运动应当遵守同样的定律，不管人们把它纳于固定的坐标轴或纳于作直线而匀速运动的坐标轴".

⑥彭加勒预感到物理学上将有重大突破，他说："也许我们还要构造一种全新的力学，我们只不过是成功的瞥见了它，在这种力学中，惯性随着速度而增加，光速会变为不可逾越的极限.通常比较简单的力学可能依然是一级近似，因为它对不太大的速度还是正确的，以致于在新动力学中还可以找到旧动力学."

⑦彭加勒的局限：

遗憾的是，彭加勒最终未能认识到抛弃以太的必要性，没能迈入相对论的殿堂.直到临终，他还对洛仑兹补偿理论的精神实质充满信心.他的相对性原理是作为一个"普遍的自然定律"提出来的，他期待有一种理论能解释或证明它.而狭义相对论中爱因斯坦则把相对性原理提升为公设，其中差别显而易见.

（三）洛仑兹变换的提出

1904年，洛仑兹发表了《速度小于光速运动系统中的电磁现象》，提出了决定时空变换的法则，在此基础上， 1906年彭加勒写出了"洛仑兹变换"式：

$$\begin{cases} x' = \beta l(x - vt) \\ y' = ly \\ z' = lz \\ t' = \beta l(t - \dfrac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad \text{式中：} \beta = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{v^2}}}$$

l 为速度v的函数.

可以说，洛仑兹的长度收缩假说、地方时、洛仑兹变换以及他最早形成的关于物质质量随其运动速度

增加的思想，都已包含了狭义相对论的基本内容，为爱因斯坦创立狭义相对论创造了条件.

在英费尔德(L.Infeld)的《相对论的发展史》中记录了一段他和爱因斯坦的一次谈话，英费尔德说“在我看来，即使您没有建立它，狭义相对论的出现也不会再等多久.因为彭加勒已经很接近构成狭义相对论的那些东西了.”爱因斯坦回答说：“是的，这说的对.”

杨振宁教授:“洛伦兹只有近距离眼光，没有远距离眼光洛伦兹（只重视解释实验与观测结果）局部修改物理理论，不从哲学角度考虑；彭卡莱只有远距离眼光，没有近距离眼光；彭卡莱只从哲学和数学的角度来考查问题，　不从实验和测量的角度考查；爱因斯坦具有自由的眼光，既近距离又远距离观察问题.既重视实验和观测，又注重哲学探讨（马赫著作，“奥林匹亚学院”）洛伦兹是技术型的，彭卡莱是哲学型的，爱因斯坦是物理型的.

2、狭义相对论的产生以及科学界最初的反应

古希腊有哲言说：“讲真理要使人愉快，不要讲令人不愉快的真理.”本来真理理应是令人愉快的,可是，历史的事实却是，新真理刚产生的时候往往令很大一部分人不愉快.这其中的原因,一方面可能来自新真理在产生过程中由于备受压抑，因此，在它真正站立起来时，容易对旧真理采取过份排斥的态度,使之没有能处理好与旧真理的关系而遭到反感.另一方面可能来自坚持旧真理的人在旧真理中加进去一些私人的东西，把人家对旧真理的反对看作是对他的反对.

狭义相对论是研究时空性质与物质运动关系的科学理论.自从 1905 年爱因斯坦发表《论运动物体中的电动力学》一文为标志宣告诞生以来，至今已过百年了.在当时经典物理学陷入严重危机，科学界众说纷纭、莫衷一是的情况下，爱因斯坦独辟蹊径，从一个新的视角研究了整个问题，提出了一系列新概念、新原理，建立了狭义相对论的理论体系.不仅解决了当时科学界所面临的一系列疑难问题，还为以后物理学的发展开辟了一条新的道路，为现代物理学的建立奠定了基础.百多年来，相对论在全世界广泛传播，被应用于各个学科领域，取得了辉煌的成就，在科学界赢得了崇高的地位.爱因斯坦在这一领域为人类做出了开拓性的贡献.1905 年，年仅 26 岁的爱因斯坦先生，把一篇题为“论动体的电动力学”的论文署上了他个人的作者名字后，交到了时任德国《物理学杂志》（annalen der physic）编辑的柏林大学物理教授 M.普朗克的手里.普朗克其时在病床边是否看懂了爱因斯坦的论文，旁人不得而知.但今天我们知道,普朗克曾将该文请伯尔尼的格鲁涅尔教授审阅，格鲁涅尔看过之后，又请物理学教授福尔斯特审阅.两教授最终审阅的结论是“不知所云”.【1】洛仑兹的理论是以静止以太为出发点，在保持麦克斯韦方程不变的条件下创立起来的“构造性”理论；而爱因斯坦的狭义相对论是在相对性原理和光速不变原理的基础上创建的“原理性”理论.

据玻恩回忆说:“我在洛仑兹逝世前几年看望他时，他对相对论的怀疑态度没有改变.”据板田昌一讲，洛仑兹面对波粒二象性的新概念，曾绝望地哀叹:“在今天，人们提出了和昨天所说的绝然相反的主张.这样一来，已经没有真理的标准了，也不知道科学是什么了，我真后悔我未能在这些矛盾出现前五年死去.”　玻耳兹曼直到 1902 年还公开宣称：“力学是整个理论物理大厦赖以建立的基础，是所有其他科学分枝赖以产生的根源.”　迈克尔逊设计试验的目的是为了证明“以太”的存在，可是事与愿违.为此他非常失望，以至于试验没按原计划完成，而是草草收场.他至死（1931 年）还念念不忘“可爱的以太”.　J.J.汤姆生在 1909 年宣称:“以太并不是思辩哲学家异想天开的创造,对我们来说,就象我们呼吸空气一样不可缺少.”A.A 马克西莫夫说：“整个说来，相对论为科学发展所提出的方向却是错误的.”

普朗克是量子论的天才创始人，也是一个具有广泛科学兴趣和敏锐直觉的物理学家，他还是高度评价相对论的内在严整和谐的第一人.他理解到或者说感觉到爱因斯坦的理论将长期决定物理学的研究方向，这些研究将带来不能预先确定的、但对科学和文化的所有领域无疑是重大的成果.普朗克使用了他在科学院院士中无可争议的权威，不只是科学上的，还有道德上的权威，全力赞誉着爱因斯坦.无论在这儿，还是在那儿，人们根本不理解我的理论，这难道不会对我有一个很愚蠢的印象吗？我认为，发生这种现象是很滑稽和有趣的.我相信，真正吸引他们的是不理解所带来的神秘性；这使他们印象深刻，因为它具有神秘的诱惑力.【2】因为电磁场在这里不再以某些物质的状态的身份出现，它本身就是存在物，它和有重物质是同一类东西，而且它也带有惯性的特征.”　“这样一个理论允许一下子预言到迈克耳孙和莫雷的否定结论.”【3】2012 年初出版的一本高举宏相大旗的新著《科学巨擘：爱因斯坦》中，作者义愤填膺地说:“无论是‘狭义相对论’还是‘广义相对论’，总有一些反对意见冒出来，还有若干实验公布于世，以证明他的理论是‘错误’的……而这些暗流的来源，又不是孤陋寡闻之士，全是物理学领域的专家.这让诺贝尔奖委员会举棋不定，不敢把奖颁发给爱因斯坦.”

1922 年，普特南出版公司出版了哥伦比亚大学天体力学教授查尔斯•普尔所著的《万有引力与相对论》一书，该书对爱因斯坦理论当时的实验依据进行了

批评.它提出了重要的意见,并且用商榷的而不是武断的口气说,“相对沦也许是正确的，但是，目前的证据尚不完备.”1932 年阿瑟·林奇的著作《驳爱因斯坦》虽然根本不是什么严谨的科学论著，但也不是毫无价值.直到后来,仍有许多享有盛名的物理学家持有与爱因斯坦根本不同的观点，英国著名的数学家爱德华·米尔恩的“运动相对论”就是一例.中国 “文革”期间,曾掀起过批判相对论和爱因斯坦的风潮，认为相对论的时空理论“是彻头彻尾的形而上学唯心主义的”、“在物理学中掀起了一股强大的唯心主义逆流”，爱因斯坦本人则被认定为“本世纪以来自然科学领域中最大的资产阶级反动学术权威”.诺贝尔奖委员会拒绝为 Einstein 的相对论授奖.Einstein 同时代的著名科学家 Lorentz 、彭加勒和卢瑟福等全都不赞成相对论,被 Einstein 誉为相对论先驱的马赫,竟声明自己与相对论没有关系,“不承认相对论.”.大多数物理实验家如拉海利、艾弗斯、沙迪、格兰纽父子、马林诺夫和帕帕斯等也不认同相对论.著名迈克尔逊——莫雷实验的主创人迈克尔逊因自己的实验“引出相对论这一怪物”而饮恨终生; Einstein 相对性原理把相对中性的稳定力场情况下低速惯性系中简单力学现象的等价性，引申和推广到一切惯性系和所有物理现象的等价性，进一步扩大了人的认识和客观自然的矛盾.为了这个假设能有立足之地,它假设空间是虚无的真空,还假设了光速不变及光速最大,还假设不同惯性系上的空间和时间可变，……由于这些错误的假设做前提，所以才产生了《狭义相对论》这个“怪物”（迈克尔逊语）.

参考文献

【1】 陈建礼.逝者如斯，而未尝往也——狭义相对论的诞生[G]//科学的丰碑——20 世纪重大科技成就纵览.济南：山东科学技术出版社，1998：340.

【2】 John D.Barrow. 作为图标的爱因斯坦[J]//爱因斯坦与物理百年(year of physics a celebration in chinese）.北京. 北京大学出版社，2005：13.

【3】 A.爱因斯坦.关于相对性原理和由此得出的结论[G]//爱因斯坦文集（第二卷）.北京：商务印书馆，1977:151.

3、Lorentz transformation 经典物理推导方法【1】

方法 1：设空间有两个静止的物体 A 与 B，它们之间重力的作用力为 F_1，在 t 刻内 A 的重力对 B 做功 F_1ut；当 A 有 v 速时设 A、B 之间的重力作用为 F_2，其重力对 B 的初始速度是 $u'+v$，设在 t' 刻对 B 做了与 F_1ut 等量的功.于是得等式：$F_1ut=F_2(u'+v)t'$ （1）

当 A、B 都有 v 速时，设它们的重力作用为 F_3，动 A 在 t' 刻对动 B 做功 $F_3u't'$；而当 A 静止而 B 有 v 速时，静 A 在 t'' 刻对动 B 做了与 $F_3u't'$ 等量的功，于是得等式：$F_3u't'=F_4(u-v)t''$ （2）

设 $t''=nt$，$\frac{F_4}{F_3}\bullet n=k_2$，$\frac{F_2}{F_1}=k_1$，$ut=x$，$u't'=x'$，代入（1)、(2)，

可得等式：$x=k_1(x'+vt')$ （3） $x'=k_2(x-vt)$ （4）

将（4）代入（3），消去 x'，整理得：$t'=k_2\left[t-\frac{x}{v}\left(1-\frac{1}{k_1k_2}\right)\right]$ （5）

将（4）、（5）代入 $x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2$，整理可得三大项：

$$(c^2k_2^2-k_2^2v^2-c^2)t^2+\left[2vk_2^2-\frac{2c^2k_2^2}{v}\left(1-\frac{1}{k_1k_2}\right)\right]xt+\left[1-k_2^2+\frac{c^2k_2^2}{v^2}\left(1-\frac{1}{k_1k_2}\right)^2\right]x^2=0,$$

当 t^2、xt、x^2 的系数均为 0 时，上式成立.

从第一项系数等于 0，可解得 $k_2=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.将 k_2 代入第二项系数并等于 0，可解得 $k_1=k_2$.将 k_1、k_2 代入第三项系数，可验证其为 0.这样就求得了洛伦兹变换.

方法 2、用相对性原理求出变换关系式

S 原点的坐标为

$$\begin{cases} x = 0(S\text{上测}) \\ x' = -vt'(S'\text{上测}) \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x' + vt' = 0 \end{cases}$$

∵ x 与 $x' + vt'$ 同时为零，∴ 可写成：$x = k(x' + vt')^m$. ∵两组时空坐标是对一事件而言的，∴它们应有一一对应关系，即要求它们之间为线性变换，∴m=1，即 $x = k(x' + vt')$ （6）

同理：$x' = k'(x + vt)$ （7）

根据相对性原理，对等价的惯性系而言，(6)、(7)二式除 $v \to v'$ 外，它们应有相同形式，即要求 $k' = k$，

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k(x' + vt') \\ x' = k(x - vt) \end{cases} \qquad (8)$$

解（6）有 $t' = kt + \frac{1-k^2}{kv}x$ （9）

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = k(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad (10)$$

2、用光速不变原理求 k=?

$t = t' = 0$ 时，一光信号从原点沿 OX 轴前进，信号到达坐标为：

$$\begin{cases} x = ct(S\text{系上测}) \\ x' = ct'(S'\text{系上测}) \end{cases} \quad (c\text{ 不变}) \qquad (11)$$

(11)代(8)中

$$\begin{cases} ct = k(ct' + vt') = k(c + v)t' \\ ct' = k(ct - vt) = k(c - v)t \end{cases}$$

上述二式两边相乘有：

$$c^2tt' = k^2(c^2 - v^2)tt'$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (\beta = \frac{v}{c})$$

k 代(10)中，有

$$\boxed{\begin{cases} x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}} \quad \text{或} \quad \boxed{\begin{cases} x' = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}} \qquad (12)$$

讨论：（1）时间与空间是相联系的，这与经典情况截然不同.

（2）因为时空坐标都是实数，所以 $\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 为实数，要求 $v \le c$. v 代表选为参考系

的任意两个物理系统的相对速度.可知,物体的速度上限为 c， $v > c$ 时洛伦兹变换无意义.

（3） $v/c << 1$ 时，

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

即洛伦兹变换变为伽利略变换， $v << c$ 叫做经典极限条件.

方法三：设想有两个惯性坐标系分别叫 S 系、S'系，S'系的原点 O‘相对 S 系的原点 O 以速率 v 沿 x 轴正方向运动.任意一事件在 S 系、S'系中的时空坐标分别为（x，y，z，t）、（x'，y'，z'，t'）.两惯性系重合时，分别开始计时 .若 x=0，则 x'+vt'=0.这是变换须满足的一个必要条件，故猜测任意一事件的坐标从 S'系到 S 系的变换为 x=γ(x'+vt') (1)

式中引入了常数γ，命名为洛伦兹因子

（由于这个变换是猜测的，显然需要对其推导出的结论进行实验以验证其正确性）

在此猜测上，引入相对性原理，即不同惯性系的物理方程的形式应相同.故上述事件坐标从 S 系到 S'系的变换为

x'=γ(x-vt) (2)

y 与 y'、z 与 z'的变换可以直接得出，即

y'=y (3)

z'=z (4)

把（2）代入（1），解 t'得

t'=γt+(1-γ^2)x/γv (5)

在上面推导的基础上，引入光速不变原理，以寻求γ的取值

设想由重合的原点 O（O'）发出一束沿 x 轴正方向的光，设该光束的波前坐标为（X，Y，Z，T)、(X'，Y'，Z'，T').根据光速不变，有

X=cT (6)

X' =cT' (7)

（1）（2）相乘得

xx'=γ^2(xx'-x'vt+xvt'-v^2*tt') (8)

以波前这一事件作为对象，则（8）写成

XX'=γ^2(XX'-X'VT+XVT'-V^2*TT') (9)

（6）（7）代入（9），化简得洛伦兹因子

γ=[1-(v/c) ^2]^(-1/2) (10)

（10）代入（5），化简得

t'=γ(t-vx/c^2) (11)

把（2）、（3）、（4）、（11）放在一起，即 S 系到 S'系的洛伦兹变换

x'=γ(x-vt),

y'=y,

z'=z,

t'=γ(t-vx/c^2) (12)

根据相对性原理，由（12）得 S'系到 S 系的洛伦兹变换

x=γ(x'+vt'),

y=y',

z=z',

t=γ(t'+vx'/c^2) (13)

下面求洛伦兹变换下的速度变换关系

考虑分别从 S 系和 S'系观测一质点 P 的运动速度.设在 S 系和 S'系中分别测得的速度为 u(j,n,m)和 u'(j'，n'，m')

由（12）对 t’求导即得 S 系到 S’系的洛伦兹速度变换
j’=(j-v)/(1-vj/c^2)，
n’=n/[γ(1-vj/c^2)^-1]，
m’=m/[γ(1-vj/c^2)^-1] (14)
根据相对性原理，由（14）得 S’系到 S 系的洛伦兹速度变换
j=(j’+v)/(1+vj’/c^2)，
n=n’/[γ(1+vj’/c^2)^-1]，
m=m’/[γ(1+vj’/c^2)^-1] (15)

洛伦兹变换结合动量定理和质量守恒定律，可以得出狭义相对论的所有定量结论.这些结论得到实验验证后，也就说明了狭义相对论的正确性

参考文献：

【1】徐行可、张晓、张庆福：《物理学概论（上）》134 页，西南交通大学出版社，1995 年 12 月版

4、同时性的相对性

经典力学体系中，不需要考虑观测者的观测效应，也不需要任何观测信号，所以也不存在信号延迟问题.这表明经典力学所考虑的是在理想状态下的物理本质关系.在现实生活中，任何物理事件的本质都需要通过对物理现象的观察来反映，这样就必然引入观测者，而观测者本身不能将自己置于整个三维空间中，所以必须借助观测信号来进行观测，由此又必须引入观测信号.这种引入了观测这和观测信号的物理规律，与理想状态下的物理本质规律是不会完全相同的，需要进行一定的关系推演，才能够通过观测者所观测到的物理现象推知符合经典理论的物理本质.“在相对论的第一篇论文发表之前很久，爱因斯坦就已经认识到‘相对性原理’和‘麦克斯韦电磁理论’是应该坚持的基本原理，他也已认识到这将导致电磁理论与参考系无关，以及由此引起的光速与参考系无关的结论，即所谓‘光速不变性’.也就是说，爱因斯坦已经抓住了‘相对论’的基础.那么他为什么一直没有建立起‘相对论’呢？……他回忆……当时……正被一个问题卡住.这个问题就是‘光速不变性’似乎与力学中的速度叠加法则相矛盾.”[1] “在经过了一年时间的研究以后，爱因斯坦终于领悟到，问题正出在人们最不容易怀疑的一个基本思想观念上，即同时性的问题上.”[2] “同时的相对性正是爱因斯坦建立狭义相对论时空观的突破点.在经典力学中时间是绝对的，因而同时也是绝对的：在一个惯性系中同时发生的两事件，在所有惯性系中都是同时的.”[3]

Einstein 在<<狭义相对论的意义>>中写道：为了完成时间的定义，可以使用真空中光速恒定的原理.假定在 K 系各处放置同样的时计，相对于 K 保持静止，并按下列安排校准.当某一时计 Um 指向时刻 Tm 时，从这只时计发出光线，在真空中通过距离 Rmn 到时计 Un；当光线遇着时计 Un 的时刻，使时计 Un 对准到时刻 Tn=Tm+Rmn/c.光速恒定原理于是断定这样校准时计不会引起矛盾.设有一个牛顿力学方程在其中有效的坐标系.为了使我们的陈述比较严谨，并且便于将这坐标同以后要引进来的别的坐标系在字面上加以区别，我们叫他“静系”.

如果一个质点相对于这个坐标系是静止的，那末它相对于后者的位置就能够用刚性的量杆按照欧几里得几何的方法来定出，并且能用笛卡儿坐标系来表示.

如果我们要描述一个质点的运动，我们就以时间的函数来给出它的坐标值.现在我们必须记住，这样的数学描述，只有在我们十分清楚的懂得“时间”在这里指的是什么之后才有物理意义.我们应当考虑到：凡是时间在里面起作用的我们的一切判断，总是关于同时的事件的判断.比如我说，“那列火车 7 点钟到达这里”，这大概是说“我的表的指针指导 7 同火车的到达是同时的事件.”①

可能有人认为，用“我的表的短针的位置”来代替“时间”，也许有可能克服由于定义“时间”而带来的一切困难.事实上，如果问题只是在于为这只表所在的地点来定义一种时间，那末这样的一种定义就已经足够了；但是，如果问题是要把发生在不同地点的一系列事件在时间上联系起来，或者说——其结果依然一样——要定义出那些在远离这只表的地点所发生的事件的时间，那末这样的定义就不够了.

当然，我们对于用如下的办法来测定事件的时间也许会感到满意，那就是让观察者同表一起处于坐标的原点上，而当每一个表明时间发生的光信号通过空虚空间达到观察者时，他就把时针位置同光到达的时间对应起来.但是这种对应关系有一个缺点，正如我们从经验中所已知道的那样，他同这个带有表的观察者所在的位置有关.通过下面的考虑，我们得到一种比较切合实际得多的测定法.

如果在空间的 A 点放一钟，那末对于贴近 A 处的事件的时间，A 处的一个观察者能够由找出同这些事件同时出现的时针的位置来加以确定.如果又在空间的 B 点放一只钟——我们还要加一句，“这是一

只同放在 A 处的那只完全一样的钟.”——那末，通过在 B 处的观察者，也能够求出贴近 B 处的事件的时间，但是是没有进一步的规定，也能够求出贴近 B 处的事件的时间，但是要没有进一步的规定，就不可能把 A 处的事件同 B 处的事件在时间上进行比较；到此为止，我们只定义了“A 时间”和“B 时间”，但是并没有定义对于 A 和 B 公共的“时间”. 只有我们通过定义，把光从 A 到 B 所需要的“时间”规定等于它从 B 到 A 所需要的“时间”，我们才能够定义 A 和 B 的公共“时间”. 设在“A 时间”tA 从 A 发出一道光线射向 B，它在“B 时间”tB 又从 B 被反射向 A，而在“A 时间”t`A 回到 A 处. 如果 tB — tA = t`A — tB, 那末这两只钟按照定义是同步的.

我们假定，这个同时性的定义是没有矛盾的，并且对于无论多少个点也适用，于是下面两个关系是普遍有效的：

1. 如果在 B 处的钟同在 A 处的钟，那末在 A 处的钟也就同 B 处的钟同步.
2. 如果在 A 处的钟既同 B 处的钟，有同 C 处的钟同步的，那末，B 处的两只钟也是相互同步的.

这样，我们借助于某些（假想的）物理经验，对于静止不同地放的各只钟，规定了什么叫做它们是同步的，从而显然也就获得恶劣“同时”和“时间”的定义. 一个事件的“时间”，就是在这事件发生地点静止的一只钟同该事件同时的一种指示，而这只钟是同某一只特定的静止的钟同步的，而且对于一切的时间测定，也都是同这只特定的钟同步的.

根据经验，我们还把下列量值 2AB / (t`A — tA) = V, 当作一个普适常数（光在空虚空间中的速度）. 要点是，我们用静止在静止坐标系中的钟来定义时间；由于它从属于静止的坐标系，我们把这样定义的时间叫做“静系时间”.

注：① 这里，我们不去讨论那种隐伏在（近乎）同一地点发生的两个事件的同时性这一概念里的不精确性，这种不精确性同样必须用一种抽象法把他们消除. ——原注

Einstein 认为地方时才是度量物体运动的唯一真实的时间，而洛伦兹却在 1915 年再版的《电子论》中承认了自己的错误：“是我坚持变量 t 只能考虑为真实时间的思想和我坚持地方时 t 必须只能考虑为一个数学辅助量的思想的结果.”认为地方时只不过是数学的假定或是一种数学辅助量，不具有真实的物理意义. 1922 年 12 月 14 日 Einstein 在日本东京演说《我是如何创造相对论的》：“时间这个概念本来是不能给一个绝对的定义的，”《Einstein 文集》：“由此得知，两个隔开的事件的同时性不是一个不变的概念，刚体的大小和时钟的快慢都同它们的运动状态有关.”两个隔开的事件我们不知道是不是完全隔开的，如果完全独立到没有任何关系联系时我们讨论已无任何意义和怎么的都行，因为我们根本无法知道或不知道是不是同时或不同时和谁也不知道究竟谁不准. 测量与被测量肯定是属于一个系统，不存在两个完全隔开的事件，两个隔开的事件不属于相对关系，如果属于一个相对系统这时又违背了相对性原理，既然相对就必然存在相互联系，隔开也还是属于一个系统. Einstein 的相对却是两个毫无关联的组成的一个体系，既然是一个体系那么就必然存在一个相同的物理条件，它们之间也就应该存在必然联系，相对也好绝对也好但都是存在对应联系关系的. 所谓的相对性是把它们之间的时间与运动的关系实质分割成孤立毫不相关而造成的，否则就不会发生相对时间事件了.

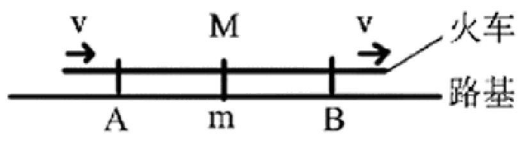
Einstein 为我们选择了最好的校钟法：“我们必须在这两个钟的距离的中点处摄取这两个钟的电视图，在这个中点上观察它们. 如果信号是同时发出的，它们也同时到达中点处. 假使从中点上所观察到的两个好钟一直指示着相同的时间，那么它们便能很适宜于来指示距离很远的两点上的时间.”【44】我们可以很清楚地看到这种方法是以光速各向同性为前提的. Einstein 在 1905 年《论动体的电动力学》一文中建立狭义相对论时，提出了同时的相对性. Einstein 在思想世界中经过一番想象推论之后指出：“我们不能给予同时性这概念以任何绝对的意义；两个事件，从一个坐标系看是同时的，而从另一个相对于这个坐标系运动着的坐标系看来，它们就不能再被认为是同时的事件了.”【5】Einstein 于 1916 年在《狭义与广义相对论浅说》一书中对同时的相对性所作详细阐述的原文和配图【6：

假设有一列很长的火车，以恒速 v 沿着如图标明的方向在轨道上行驶. 在这列火车上旅行的人们可以很方便地把火车当作刚性参考物体（坐标系）；他们参照火车来观察一切事件. 因而，在铁路线上发生的每一个事件也在火车上某一特定地点发生. 而且完全和相对路基所作的同时性定义一样，我们也能相对火车作出同时性的定义. 但是，作为一个自然的推论，下述问题就自然产生（参见图一）：

对于铁路路基来说同时的两个事件（例如 A、B 两处雷击），对于火车来说是否也是同时的呢？我们将直接证明，回答必然是否定的.

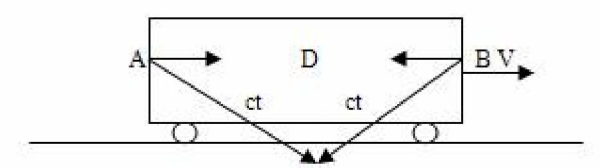
当我们说 A、B 两处雷击相对于路基而言是同时的，我们的意思是：在发生闪电的 A 处和 B 处所发出的光，在路基 A→B 这段距离的中点 m 相遇. 但是事件 A 和 B 也对应于火车上的 A 点和 B 点. 令 M 为在行驶中的火车上 A→B 这段距离的中点. 正当雷电闪光发

生的时候（从路基上判断），点 M 自然与点 m 重合，但是点 M 以火车的速度 v 向图中的右方移动. 如果坐在火车上 M 处的一个观察者并不具有这个速度，那么他就总是停留在 m 点，雷电闪光 A 和 B 所发出的光就同时到达他这里，也就是说正好在他所在的地方相遇. 可是实际上（相对于铁路路基来考虑）这个观察者正在朝着来自 B 的光线急速前进，同时他又在来自 A 的光线前方向前行进. 因此这个观察者将先看见自 B 发出的光线，后看见自 A 发出的光线. 所以，把列车当作参考物体的观察者就必然得出这样的结论，即雷电闪光 B 先于雷电闪光 A 发生. 这样我们就得出以下的重要结果：对于路基是同时的若干事件，对于火车并不是同时的，反之亦然（同时的相对性）. 每一个参考物体（坐标系）都有他本身的特殊的时间；除非我们讲出关于时间的陈述是相对于哪一个参考物体的，否则关于一个事件的时间的陈述就没有意义.



图一 爱因斯坦给出同时的相对性时假设的路基、火车和闪光情况

相对论是研究相对运动系统内物质运动变化规律的时空理论. 如果在一个系统内发生两个或两个以上的事件，则事件的先后次序是必须考虑的. 由于系统是相对运动着的，从一个系统去观测另一系统中发生的事件，只有用光来传递信息. 下面的实验将告诉我们，相对论里同时性只具有相对的意义.



[图 15]

[图 15] 所示，一列匀速运动的火车，车厢长 A B，中点为 D，即 AD=BD，火车的速度为 V. 某一时刻，火车运行到 AP=BP 的位置时，A B 两点同时发生闪光，并向 D 和 P 发出光信号. 放在地面上 P 点的检测仪，将检测到 A、B 两点的光同时到达 P 点，其结果是：

$AP = BP = ct$ ------------（1）

由于火车向右运动着，D 点在向 B 方向移动，而光速是恒定的，所以 D 点的光检测仪将先接收到 B 点传来的光信号，后接收到 A 点传来的光信号. 其结果是：

$\rightarrow AD > BD \quad \frac{AD}{C}) \frac{BD}{C}$ ----------（2）

（1）式和（2）式表明，在相对运动着的系统中所发生的事件，在其中一个系统中是同时发生的事件，则在另一个系统中该事件的发生就不同时了，所以说相对论的同时性只具有相对的意义.

相对论量子场论和粒子物理的结合，不断推进对微观物质的认识并运用到宇宙学上可以看出，庞加莱是留了一手. 庞加莱提出庞加莱猜想的 1904 年时，他只类似说应把惯性相对性原理作为点外空间球或德西特时空球自然界的一个基本原理，要求不仅力学规律，而且真空电磁学的规律，在惯性系的变换下也不变. 到 1905 年庞加莱把相对性原理从具有伽利略不变性，再扩展为具有庞加莱不变性的有限而无界的宇宙模型，这类似郭汉英先生称的涉及“真空零点能之类的佯谬”. 爱因斯坦假定称它为“点内空间”球或反德西特时空球，那么可以看出，同年爱因斯坦在洛伦兹等人工作的基础上，利用光信号来确定同时性，否定牛顿的绝对时间和绝对空间提出时空观革命的狭义相对论，是配合普朗克、庞加莱抛出的“大量子论”. 爱因斯坦认为：“只要时间的绝对性或同时性的绝对性这条公理不知不觉地留在潜意识里，那么任何想要满意地澄清这个悖论的尝试，都注定要失败. 如果我们要描述一个质点的运动，我们就以时间的函数来给出它的坐标值. 现在我们必须记住，这样的数学描述只有在我们十分清楚地懂得‘时间’在这里指的是什么以后才会有物理意义. 我们应当考虑到，凡是时间在里面起作用的我们的一切判断，都是关于同时的事件的判断. 比如我们说：那列火车七点钟到达这里，这就是说，我的表指到 7 与火车到达是同时事件. ”

参考文献：

[1] 刘辽、赵峥、田贵花、张靖仪著《黑洞与时间的性质》（北京大学出版社，2008 年 12 月第 1 版，第 228 页）
[2] 朱鋐雄著《物理学思想概论》（清华大学出版社，2009 年 5 月第 1 版，第 163 页）
[3] 刘辽、费保俊、张允中编著《狭义相对论》（科学出版社，2008 年 7 月第二版，第 27 页）
【4】A·Einstein 著《物理学的进化》（上海科学技术出版社，1962 年 3 月第 1 版，第 132 页）
【5】A.Einstein 著 《Einstein 文集》第二卷 89 页 ，商务引书馆 1977.7
【6】A.Einstein 著 《狭义与广义相对论浅说》，21 页，上海科学技术出版社 1964.8

5、Lorentz transformation 的相对论推导

（一）、“Lorentz transformation”的推导方法 1

洛仑兹变换反映的是同一研究对象在不同惯性系中运动规律都有相同数学形式.如图 1 所示两坐标系的相对取向，该坐标系的 x 轴永远是重合的.在这个情况下，首先只考虑 x 轴上发生的事件.任何一个这样的事件，对于坐标系 K 是由横坐标 x 和时间 t 来表示，对于坐标系 K′ 则由横坐标 x′ 和时间 t′ 来表示.当给定 x 和 t 时，我们要求出 x′ 和 t′ .

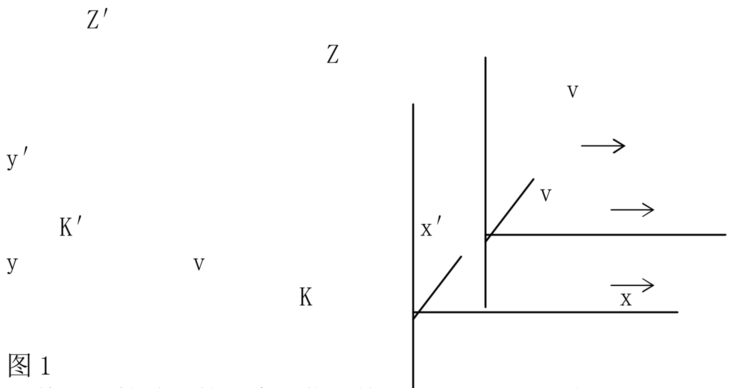


图 1

沿着正 x 轴前进的一个光信号按照方程 $x = ct$ 或 $x - ct = 0$ （1）传播.由于同一光信号必须以速度 c 相对于 K′传播，因此相对于坐标系 K′ 的传播将由类似的公式 $x' - ct' = 0$ （2）表示.满足（1）的那些空时点（事件）必须也满足（2），显然这一点是成立的，主要关系 $(x' - ct') = \lambda (x - ct)$ （3）一般被满足，其中 λ 表示一个常数；因为，按照（3），$(x-ct)$ 等于零时 $(x'-ct')$ 就必然也等于零.如果我们对沿着负 x 轴传播的光线应用完全相同的考虑，我们就得到条件 $x' + ct' = u(x+ct)$ （4）

方程（3）和（4）相加（或相减），并为方便起见引入常数 a 和 b 代换常数 λ 和 u，令

$a = (\lambda + u)/2$ 以及 $b = (\lambda - u)/2$

我们得到方程

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

因此，若常数 a 和 b 为已知，我们就得到我们的问题的解.a 和 b 可由下述讨论确定.

对于 K′的原点我们永远有 $x' = 0$，因此按照（5）的第一个方程 $x = bct/a$

如果我们将 K′ 的原点相对于 K 的运动的速度称为 v，我们就有 $v = bc/a$ （6）

同一量值 v 可以从方程式（5）得出，只要我们计算 K′的另一点相对于 K 的速度，或者计算 K 的一点相对于 K′ 的速度（指向负 x 轴），总之，我们可以指定 v 为两坐标系的相对速度.

还有，根据“相对性原理”，由 K 判断的相对于 K′保持静止的单位量杆的长度，必须恰好等于由 K′ 判断的相对于 K 保持静止的单位量杆的长度.为了看一看由 K 观察 x′ 轴上的诸点是什么样子，我们只需要从 K 对 K′ 拍个“快照”；这意味着我们必须引入 t（K 的时间）的一个特别的值，例如 t=0.对于这个 t 的值，我们从（5）的第一个方程就得到 $x' = ax$.

因此，如果在 K′ 坐标中测量，x′ 轴上两点相隔的距离为 $\Delta x' = 1$，该两点在我们瞬时快照中相隔的距离就是 $\Delta x = 1/a$ （7）

但是如果从 K′ （$t' = 0$）拍快照，而且如果我们从方程（5）消去 t，考虑到表示式（b），我们得到

$x' = a(1 - v^2/c^2)x$

由此推断，在 x 轴上相隔距离 1（相对于 K）的两点，在我们快照上将由距离

$\Delta x' = a(1 - v^2/c^2)$ （7a）表示.

根据以上所述，这两个快照必须是全等的，因此（7）中的 Δx 必须等于（7a）中的 Δx′ ，这样我们就得到 $a^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$ （7b）

方程（6）和（7b）决定常数 a 和 b，在（5）中代入这两个常数的值，就得到了洛仑兹变换的如下基本方程：

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ t' &= (t - xv/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

关于狭义相对论推导 Lorentz transformation 的过程，如果用纯粹数学来证明，可以简化为以下

内容：

条件一、$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$，$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$，其中c为常数.

条件二、$x'=a_{11}x+a_{12}t$，$t'=a_{21}t+a_{22}x$，其中a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}均为常数，且$a_{12}=-va_{11}$，v也为常数.

条件三、$y'=y$，$z'=z$.

先求a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}的值.经过简单计算，可以得到

$$a_{11}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}，\quad a_{12}=-\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}，\quad a_{21}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}，\quad a_{22}=-\frac{\beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}}，\text{其中}\ \beta=\frac{v}{c}.$$

再将这四个常数代回条件二，可以得到Lorentz transformation

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}，\quad y'=y，\quad z'=z，\quad t'=\frac{t-\beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Einstein 根据两个基本假设，经过纯数学的演算，不需要添加任何物理学原理，就能推导出 Lorentz transformation.继而有相对论时空观：时间、空间随着参照系的改变而改变.因而，只要两个基本假设成立，相对论的时空观就是正确的.Einstein 在研究 Lorentz transformation 下动量守恒时，提出了相对论质量观：物体的质量随着物体运动状态的改变而改变. 也可以说成：物体的质量随着观察者的不同而不同.在相对论之前，经典理论认为质量是物体的固有属性，不随物体运动状态的变化而变化.如今，相对论又把经典理论中的一个不变量——质量，演绎成一个可变量.

狭义相对论在推导光学多普勒效应频率变换式，有关著作给出的一般推导过程中是设

$$\Psi=\frac{A}{r}\exp 2\pi i\nu\left(t-\frac{r}{c}\right)，\quad \Psi'=\frac{A'}{r'}\exp 2\pi i\nu'\left(t'-\frac{r'}{c}\right) \qquad (11)$$

又设

$$r=x\cos\theta+y\sin\theta，\quad r'=x'\cos\theta'+y'\sin\theta' \qquad (12)$$

将式组（12）前一个关系式代入式组（11）前一个关系式中的$\nu\left(t-\frac{r}{c}\right)$，得

$$\nu\left(t-\frac{x\cos\theta}{c}-\frac{y\sin\theta}{c}\right) \qquad (13)$$

将式组（12）后一个关系式和洛仑兹变换中的前三个关系式代入式组（12）后一个关系式中的$\nu'\left(t'-\frac{r'}{c}\right)$，得

$$\nu'\left(\frac{1+\beta\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\left[t-\frac{x}{c}\left(\frac{\beta+\cos\theta'}{1+\beta\cos\theta'}\right)-\frac{y}{c}\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta'}{1+\beta\cos\theta'}\right)\right] \qquad (14)$$

狭义相对论认为式（14）与式（13）的各对应项系数应该相等，因此得出

$$\nu=\nu'\left(\frac{1+\beta\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)，\quad \cos\theta=\frac{\beta+\cos\theta'}{1+\beta\cos\theta'}，\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta'}{1+\beta\cos\theta'} \qquad (15)$$

Einstein 在 1905 年《论动体的电动力学》一文中建立狭义相对论时，从 Lorentz transformation 中推导出了所谓的动钟变慢.我们现在考虑永久放在 R 系的原点（X=0）上的一个按秒报时的钟（此处的 R、r 系如上图所示）.T = 0 和 T = 1 对应于该钟接连两声滴嗒.对于这两次滴嗒，Lorentz transformation 的第一和第四方程给出 t = 0 和 t = $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$

从 r 去判断，该钟以速度 u 运动；从这个参考物体去判断，该钟两次滴嗒之间所经过的时间不是 1 秒，而是

$1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ 秒，亦即比 1 秒钟长一些.该钟因运动比静止时走的慢了.速度 C 在这里也具有一种不可达到的极限速度的意义.”

必须指出，相对论的动钟变慢效应是相对的，亦即在相对论中如下表述同样成立：

“我们现在考虑永久放在 r 系的原点（x=0）上的一个按秒报时的钟.t=0 和 t=1 对应于该钟接连两声滴嗒.对于这两次滴嗒，Lorentz transformation 的第一和第四方程给出 T = 0，T = $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$.从 R 去判断，该钟以速度 u 运动；从这个参考物体去判断，该钟两次滴嗒之间所经过的时间不是 1 秒，而是 $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ 秒，亦即比 1 秒钟长一些.该钟因运动比静止时走的慢了.速度 C 在这里也具有一种不可达到的极限速度的意义.”

（二）、“Lorentz transformation”的推导方法 2

如图所示：假设 S`系中的 X`轴的正方向的 Lo 点发生了事件 A，此时 S`系的时钟读数为 t`，求在 S 系中 A 事件的坐标.

O———O`————————A————————————————

| ut` | Lo |

显然，事件 A 在 S`系的坐标为 Xa`=Lo，Ta`=t`

事件 A 在 S 系的坐标应该为： Xa=OAs，Ta=t ，OAs 的长度在 S`系发生收缩，因此有：

OAs`=k•OAs ……（1）

从图中可以看出：OAs`=OO`s`+O`As` ……（2）

在上面的（1）、（2）式中，OAs 是 OA 在 S 系中的距离，OAs`是 OA 在 S`系中的距离，OO`s`是 OO`在 S`系中的距离，等于 ut`，O`As`是 O`A 在 S`系中的距离，等于 Lo，k=根号下（1-uu/uu）.

因此，由式（1）、（2）得： k•OAs=OO`s`+O`As`， OAs=（Lo+ut`）/k ……（3）， 结合事件 A 在 S`系的坐标为 Xa`=Lo，Ta`=t` 和在 S 系的坐标 Xa=OAs，式（3）可写为： Xa=（Xa`+ut）/k （这就是 X 坐标的洛变换式）， 从图中还可以看出：OAs=O`As+OO`s ……（4），这里：OAs 为 OA 在 S 系中的距离，等于 Xa；O`As 为 O`A 在 S 系中的距离，应该等于 k•O`As`，即 k•Xa`；OO`s 为 OO`在 S 系中的距离，等于 ut. 因此，式（4）可写为： Xa=k•Xa`+ut ……（5）， 式（5）结合上面已经得到的 Xa 变换式，可以得到： k•Xa`+ut=（Xa`+ut）/k,从上式中解出 t 得： t=（t`+uXa`/cc）/k （这就是 t 坐标的洛变换式）

这也就是说，相对论的动钟变慢效应是相对的，即相对运动的观测者都认为对方的时钟慢于自己的时钟慢.【1】根据 Einstein 的观点，观察到时间膨胀效应必须有两个先决条件：其一，两个惯性系必须有相对运动；其二，在测量中观察者必须用自己参考系中的无数个钟和另一个与自己有相对运动的惯性系内一个固定的钟相比较，才会发现对方钟走慢了.没有这两个条件根本不可能观察到时间膨胀.在狭义相对论中时间膨胀并不意味着钟“真”的走慢了，时间膨胀是在测量过程中发生的.

（三）、“Lorentz transformation”的推导方法 3

经典的洛伦兹变换指出：我们将求出相对论的变换公式，这些公式恰好是根据那个事件间的间隔不变的要求的.如果我们为了便于以后的叙述利用量 $\tau = ict$，那么，正如在§1-2 里所看到的二事件间的间隔可以认为是在四度空间内的相对应的两个世界点间的距离.因此我们可以说，所要求的变换，必须是使所有在四度空间 x，y，z，τ 内的距离不变的变换.但是这些变换仅仅包括坐标系统的平移与旋转.其中，我们对于坐标轴对自己作平行移动并无兴趣，因为这不过是将空间坐标的原点移动一下、并将时间的参考点改变一下而已.所以，所要求的变换，在数学上应当表示为四度坐标系统 x，y，z，τ 的旋转.四度空间内的一切旋转，可以分解为六个分别在六个平面 xy，yz，zx，$x\tau$，τy，τz 内的旋转（正如在三度空间内的一切旋转可以分解为 xy，yz，zx 三个平面内的旋转一样）.其中，前三个旋转仅仅变换空间坐标，它们和通常的空间旋转相当.我们研究在 $x\tau$ 平面内的旋转，这时 y 与 z 坐标是不变的.令 ψ 为旋转角，那么，新旧坐标的关系就由以下二式决定：

$$x = x' \operatorname{con}\psi - \tau' \sin\psi,\quad \tau = x' \sin\psi + \tau' \operatorname{con}\psi \qquad (1)$$

我们现在要找出由一个惯性参考系统 K 到另一个惯性参考系统 K' 的变换公式，K' 以速度 V 沿 X 轴对 K 作相对运动.在这种情况下，显然只有空间坐标 x 与时间坐标 τ 发生变化.所以这个变换必须有(1)式的形式.现在只剩下确定旋转角 ψ 的问题，而 ψ 又仅与相对速度 V 有关.我们来研究参考系统 K' 的坐标原点在 K 内的运动.这时，$x' = 0$，而公式(1)可写成：

$x = -\tau' \sin\psi$; $\tau = \tau' \operatorname{con}\psi$. (2)

相除可得

$x/\tau = -\tan\psi$ (3)

但 $\tau = ict$，而 x/t 显然是 K' 对 K 的速度 V. 因此，

$\tan\psi = iV/c$ (4)

由之得

$\sin\psi = (iV/c)/(1-V^2/c^2)^{1/2}$，$\cos\psi = 1/(1-V^2/c^2)^{1/2}$ (5)

代入(2)，得：

$x = (x' - iV\tau')/(1-V^2/c^2)^{1/2}$，$y = y'$，$z = z'$，

$\tau = (\tau' + iVx'/c)/(1-V^2/c^2)^{1/2}$ (6)

再将 $\tau = ict$，$\tau' = ict'$ 代入，最后得

$x = (x' + Vt')/(1-V^2/c^2)^{1/2}$，$y = y'$，$z = z'$，

$t = (t' + Vx'/c^2)/(1-V^2/c^2)^{1/2}$ (7)

这就是所要求的变换公式.它们被称为洛伦兹变换式，是今后讨论的基础.【2】

4、Part A. Lorentz 时空中 Lorentz transformation 的推导方法 4

光速独立性导致时间空间不独立，以后以时空这词表示.设两个惯性系 K，K'.K 中坐标 $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $(x_4=ict)$，K'坐标 $X'=(x_1', x_2', x_3', x_4')$ $(x_4'=ict')$. i=Sqrt(-1)，为方便引进的. K'在 K 中速度为 v. 设 t=0 两坐标系原点重合，并且这时位于原点有一点光源发光.由光速独立原理，我们在两个坐标系中都将观察到一个球面波的传播.其波前以光速 c 沿径向传播.传播距离平方 $R^2=(ct)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ in K and $R'^2=(ct')^2=x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$ in K'.所以有：$x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2t^2=0$，$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-c^2t'^2=0$，这样就知道：$x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2t^2=p(v)\cdot(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-c^2t'^2)$，其中 $p(v)\geq 0$ 是一个可能和速度有关的量，表示由于相对运动引起的可能度规变化.但是由于 K，K'两系统对称性，我们必然有 $p^2(v)=1 \Longrightarrow p(v)=1$，这样我们就知道 K，K'的时空是等度规的.度规相同表示一切几何内蕴量一致. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2t^2= x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-c^2t'^2$ (1)，用内积(就是矢量点乘运算)表示就是：$<X, X>=<X', X'>$ (2).普遍的相对性原理就是，寻求坐标变换：$X=F(X'; v)$ (3).使度规不变性(2)得以满足.F 是一个矢量函数，v 是个参数，表示 K'系在 K 系中的速度.我们讨论一下它的性质.由于相对论惯性系等价的假设，变换 F 必然有唯一的逆变换 G：

$X'=G(X; v)$ (4)，同时这等价性蕴含下述对称性：$G(X; v)=F(X, -v)$ (5)，(4)，(5)是很强的条件，它们限制 F 必然是线性变换，(5)同时也为这线性变换作了更强限制.线性变换可以用矩阵表示 $X'=X\,A(v)$，$X=X'A^{-1}(v)$ (6)

$A^{-1}(v)$表示依赖于速度的逆矩阵. A(v)是四阶矩阵，有 16 个元素需要确定.

由下列条件：$<X, X>=<X', X'>$；$X'=X\,A(v)$；$X=X'A^{-1}(v)$及线性代数运算可以证明，A(v)是列正交，行正交的矩阵，这就有 12 个方程，所以还差四个参数待定.

再考虑 K，K'关系：For $x_1'=x_2'=x_3'=0$，X 的坐标部分位置是 vt.这时三个条件，但是同时带进来矩阵 A(v)外的元素 t 和 t'.所以现在这三个条件其实只相当于一个，我们还剩三个元素待定；For $x_1=x_2=x_3=0$，X'的坐标部分为-vt'.这有是三个条件.这样我们终于唯一确定了矩阵 A(v).

以上便是 Lorentz 变换的推导.如果再形式化，并且深刻一些，应该讨论 Lorentz 群.它是 O(3，1)群.

狭义相对论空间描述：设长度为 L 的物体在相对静态场参考空间（x_0, y_0, z_0）空间以 u 速度运动，起点为 A，终点为 B 朝向 A→B，

则相对运动场空间为：$x_c = x(x_0 + ct)$；和 $x_u = x_0 + (c+u)t$

相对速度场，A 点为：$u_{xa} = c$；B 点为：$u_{xb} = c + u_x$；

则在 x 轴向上 A→B 相对运动场空间长度为：(取光的单程计算运动变长)

静态 $L_0 = x_b - x_a = c\cdot t_b - c\cdot t_a = c\cdot(t_b - t_a)$ 和动态 $L_u = x_{ub} - x_{ua} = (c+u)\cdot(t_b - t_a)$

则运动变长为：$\Delta L = L_u - L_0 = (c+u)\cdot(t_b-t_a) - c\cdot(t_b-t_a) = u\cdot(t_b-t_a) = u\cdot\triangle t$

狭义相对论空间即为：$\Omega_b - \Omega_a = V$【$x_0 + (c+u_x)t - ct_a, y_0, z_0$】

Lorentz transformation 就是保持四维伪欧氏象空间度量不变的时空坐标变换，而保持四维伪欧氏象空间度量不变的洛沦兹变换群本是 6 阶李群.

下面是陈叔喧教授的分析：对于参照系设在光源上光量子（场质）与场速度一致，但相对光源以速度 υ

运动的参照系，光量子（场质）运动速度或平动能，甚至变换能不变的. 而参照系或场平动能量的量度少了一项坐标相对运动引起的动能 mυ²/2，如果变换能 hν/2=mc²/2=m(dι/dt)²/2 也不变，那么

m(dι´/dt´)²/2=mc²-hν/2-mυ²/2=mc²-mc²/2-mυ²/2=mc²/2-mυ²/2=mc²(1-υ²/c²)/2=m(dι/dt)²(1-υ²/c²)/2dι´/dt´=(dι/dt)√(1-υ²/c²)

当 dt´=dt， dι´=dι√(1-υ²/c²)，当 dι´=dι dt´=dt/√(1-υ²/c²). 此关系等效于相对论的时空关系或罗洛兹变换. 表明相对论的时空是场的时空，因此所谓物体的长度在运动方向上收缩，是场描述属性引起的特性.

时空间隔的导出及其普适性分析

考虑惯性系 S_1 与其同族的任一惯性系间的洛伦兹变换，相对性原理表明该变换原则上只取决于惯性系间的相对速度，也即变换系数 β 应为速度 v 的函数，

令 $\beta = kv$

下面证明对于同一个惯性系族，k 是一个常数，不妨称之为洛伦兹常数.

首先考虑 x 轴上的情形，设惯性系 S_2、S_3 分别相对惯性系 S_1 沿 x 轴以速度 v_2、v_3 匀速运动，而惯性系 S_3 相对 S_2 的速度是 v_{32}，于是有

$$\begin{cases} x_2 = \gamma_2(v_2 t_1 - x_1) \\ t_2 = \gamma_2(t_1 - k_2 v_2 x_1) \end{cases} \quad (8\text{-}1)$$

$$\begin{cases} x_3 = \gamma_3(v_3 t_1 - x_1) \\ t_3 = \gamma_3(t_1 - k_3 v_3 x_1) \end{cases} \quad (8\text{-}2)$$

$$\begin{cases} x_3 = \gamma_{32}(v_{32} t_2 - x_2) \\ t_3 = \gamma_{32}(t_2 - k_{32} v_{32} x_2) \end{cases} \quad (8\text{-}3)$$

将（8-1）代入（8-3）得

$$\begin{cases} x_3 = \gamma_2\gamma_{32}[(v_2 - v_{32})t_1 - (1 - k_2 v_2 v_{32})x_1] \\ t_3 = \gamma_2\gamma_{32}[(1 - k_{32} v_2 v_{32})t_1 - (k_2 v_2 - k_{32} v_{32})x_1] \end{cases} \quad (8\text{-}4)$$

比较（8-2）与（8-4）中各项系数可得

$$\gamma_2\gamma_{32}(1 - k_2 v_2 v_{32}) = \gamma_3 = \gamma_2\gamma_{32}(1 - k_{32} v_2 v_{32})$$

即有 $k_2 = k_{32} \equiv k$

由惯性系的各向同性不难将结论延拓到任意同族惯性系，注意到洛伦兹常数的量纲是速度倒数的平方，由此不妨定义惯性速率为：

$$v_k = k^{-\frac{1}{2}}$$

惯性速率不变推论：对于同一个惯性系族，一质点在相对其中一个惯性系的运动速率为惯性速率，则该质点相对同族其他惯性系的运动速率也为惯性速率.

对（7）作微分可得 S 系到 $\overline{S}$ 系的速度变换如下：

$$\begin{cases} \overline{u}_x = \dfrac{v - u_x}{1 - kvu_x} \\ \overline{u}_y = \dfrac{u_y}{\gamma(1 - kvu_x)} \\ \overline{u}_z = \dfrac{u_z}{\gamma(1 - kvu_x)} \end{cases} \quad (9)$$

若 $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = v_k^2$

可设 $k=\dfrac{1}{v_k^{\ 2}}$, $u_x=v_k\cos\theta$

$u_y=v_k\sin\theta\cos\phi$, $u_z=\sin\theta\sin\phi$

则有 $\bar{u}_x^{\ 2}+\bar{u}_y^{\ 2}+\bar{u}_z^{\ 2}=\dfrac{(v-u_x)^2+(1-kv^2)(u_y^{\ 2}+u_z^{\ 2})}{(1-kvu_x)^2}$

$$=\frac{(v-v_k\cos\theta)^2+(1-\dfrac{v^2}{v_k^{\ 2}})v_k^{\ 2}\sin^2\theta}{(1-\dfrac{v\cos\theta}{v_k})^2}$$

$$=\frac{(v-v_k\cos\theta)^2+(v_k^{\ 2}-v^2)\sin^2\theta}{(v_k-v\cos\theta)^2}v_k^{\ 2}$$

$$=v_k^{\ 2}$$

证明了上述推论，可进一步引入四维时空点 $\mathbf{r}=(x,y,z,t)$ 到坐标原点的时空间隔函数：

$$s^2\equiv x^2+y^2+z^2-v_k^{\ 2}t^2=k(x^2+y^2+z^2)-t^2$$

时空间隔不变推论：洛伦兹变换保持时空间隔不变.

参考文献：

【1】《狭义与广义相对论浅说》，上海科学技术出版社 1964.8，31 页

【2】《场论》，Л. Л. 朗道、Е. М. 栗弗席兹著，任朗、袁炳南译，人民教育出版社 1958 年 8 月第一版，第 14—15 页.

6、狭义相对论的时空变换

什么是相对论？研究相对运动系统内，物质运动变化规律的时空理论，就是相对论. 根据相对论的定义，建立相对论，必须具备三个基本要素： 第一，要有相对运动的系统存在；第二，相对运动系统都要处于动态平衡状态（Einstein 所称的惯性状态）；第三，系统中要有物质（事件）存在. 在此三要素的基础上建立起来的时空理论，才是真正的相对论.

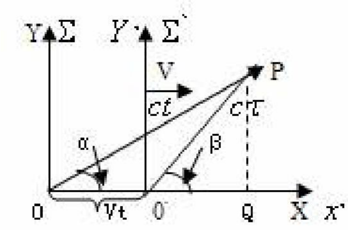
相对论存在于在动态平衡系统之中，没有动态平衡系统，就没有相对论的立足之地. 因为，在动态平衡系统中，时空变换才能满足线性迭加规律. 惯性力概念是马赫误导的结果. 马赫认为：“惯性力在本质上是一种引力”（世界科技英才录——科学思想卷 上海科技教育出版社）. 王永久认为：惯性力是一种虚构的力，“这种虚构的力的本质是什么呢？在经典力学和狭义相对论中这是不可理解的”（空间，时间和引力 湖南教育出版社）.

动态平衡原理，是地球上物理学定律成立的必要条件. 物体在不受外力作用，或所受合外力作用为零的情况下，能够保持静者恒静，动者恒动，正是物体受动态平衡原理支配的结果. 下面我们在动态平衡系统中，来建立物质运动变化规律的时空理论——相对论. 在弹性介质中其振动的传播方程不是Galileo变换下不变的，只成立于与介质相对静止的参考系中. 如果把介质看成“绝对静止系”，利用它即可测量任何惯性系的绝对速度. 其次，同一介质之间不是总能保持相对静止的.

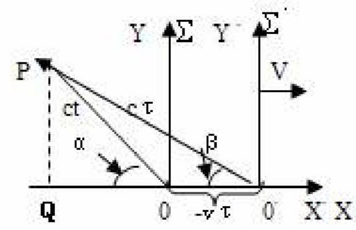
相对性原理告诉我们，在相对做匀速直线运动的系统中，对于同一事件运动变化规律的描述，具有相同形式的数学物理方程. 相对性原理，是自然界最基本的物理规律之一. 相对性原理，也是宇宙学原理的体现.

什么是相对论的时空变换？在相对运动系统中，测量同一事件的时间和空间之间的关系，就是相对论的时空变换. 同一事件是相对论时空变换的核心，时空变换是相对论的核心.

下面采用相对运动的物理参考系，来推导相对论时空变换的普适公式.



[图 2]



[图 3]

[图 2]所示，在地球上，有两个物理系统Σ和Σ'，设Σ系统为静止系统，系统中用 t 记时；Σ'系统为运动系统，系统中用τ记时.在τ=t=0 时，两系统重合.当 Σ'相对于 Σ 以速度 V 开始向 X 方向运动的同时，从原点射出一光信号.光在 Σ 系统中经过时间 t，在 Σ'系统中经过时间τ到达的同一点 P，系统的各个坐标轴始终保持平行.光从原点出发，在相对运动着的系统中，经过了不同的时间到达了同一终点 P，它们之间的时空关系是：

$ct\cos\alpha - vt = c\tau\cos\beta$ ------- （A） ； $ct\sin\alpha = c\tau\sin\beta$ -------- （B）

将（A）和（B）两式两边平方后相加得 $c^2t^2 - 2cvt^2\cos\alpha + v^2t^2 = c^2\tau^2$

将上式移项整理得： $\dfrac{\tau}{t} = \sqrt{1 - \dfrac{2v}{c}\cos\alpha + \dfrac{v^2}{c^2}}$ ---------（3）

在[图 2]条件相同的的情况下，改变光的传播方向，如[图 3]所示，可得相对论时空变换的新公式：

$\dfrac{t}{\tau} = \sqrt{1 - \dfrac{2v}{c}\cos\beta + \dfrac{v^2}{c^2}}$ ----（4）

（3）式和（4）式，都是相对论时空变换的一般表达式，它们都将纵向相对论，横向相对论，超光速运动相对论的时空变换都包含在其中，并揭示出了相对论时空的方向特性.

从（3）式看相对论时空变换的方向特征：

（1） 当$\alpha = o$时，$\dfrac{\tau}{t} = 1 - \dfrac{v}{c}$ （2）当$\alpha = \pi$时，$\dfrac{\tau}{t} = 1 + \dfrac{v}{c}$ 这两式是纵向相对论的时空变换公式

（3） 当 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\tau}{t} = \sqrt{1 + \dfrac{v^2}{c^2}}$ （4）当 $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\tau}{t} = \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c_2}}$ 这两式是横向相对论的时空变换公式.

宇宙中的诸多天体，都处于动态平衡状态，在这些天体中，都能建立相对论.没有动态平衡，就没有和谐的宇宙.

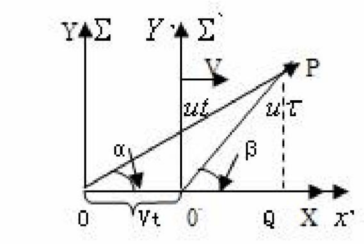
宇宙飞船是一个动态平衡系统.设宇宙飞船为Σ系统，在宇宙飞船中有一个以速度 v 匀速运动的Σ'系统.在$\tau = t = 0$时，Σ与Σ'重合.当Σ'相对于Σ开始运动的同时，从原点射出一颗速度为 u 子弹，子弹从原点出发，分别在在不同的系统 Σ'和 Σ 中，经过不同的时间τ和 t，到达同一点 P，如[图 4]所示.对于这个同一事件，有下列结果：

$ut\cos\alpha - vt = u\tau\cos\beta$ -----（e） $ut\sin\alpha = u\tau\sin\beta$ ------（f）

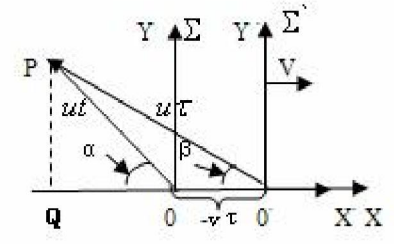
将两式平方后相加： $u^2t^2 - 2uvt^2\cos\alpha + v^2t^2 = u^2\tau^2$

经移项整理得：

$\dfrac{\tau}{t} = \sqrt{1 - \dfrac{2v}{u}\cos\alpha + \dfrac{v^2}{u^2}}$ ----------（5）



[图 4]



[图 5]

改变光的传播方向，如[图 5]所示，经过同样处理，可得：

$\frac{t}{\tau}=\sqrt{1-\frac{2v}{u}\cos\beta+\frac{v^2}{u^2}}$ --------（6），（5）式和（6）式，都是在动态平衡系统中，自然建立起来的相对论时空变换公式，它们也充分揭示出了相对论时空的方向特征．由此可见，宇宙中普遍存在着相对论．

洛仑兹变换二维双曲函数表达形式：$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$，其中：$\gamma=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，$\sinh\phi=\gamma\frac{v}{c},\cosh\phi=\gamma$。

因为 $\sinh\phi=-i\sin i\phi$，$\cosh\phi=\cos i\phi$

$$L(\phi)=\begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos i\phi & -\sin i\phi \\ -\sin i\phi & \cos i\phi \end{pmatrix}$$

可以证明，洛仑兹变换正是复变函数中的莫比乌斯变换：$M(z)=\frac{az+b}{cz+d}$．

在极限理论中，点列的收敛性是核心概念．函数的连续性、导数和积分的定义最终都归结为点列收敛性．点列的收敛性是定义在点与点之间的距离之上的，而且证明收敛性时只用到距离的两条性质，即正定性和三角不等式．所以在分析学中只用这两条性质作为公理定义了距离空间．当然原来的欧氏空间也是距离空间的一个特例．那么定义距离空间的意义在哪里呢？在于可以借用欧氏空间的概念和关系来研究更复杂的函数集合，例如连续函数空间 C[0,1]，平方可积函数空间 L2(0,1)等．把这些函数看成点，用这些函数空间中的点列的收敛性，我们就可证明一些微分方程和积分方程的解的存在性和唯一性了．沿着这个方向，分析学定义了众多的函数空间，如赋范线性空间、索贝列夫空间等，它们是解决微分方程和积分方程存在性和唯一性的基本工具．

几何沿另一个方向的发展是研究曲面上的几何问题，如球面上的几何问题，这就是微分几何．主要研究工具是微积分，张量代数及近代发展起来的微分形式等．作为欧氏几何直接推广的黎曼(Riemann)几何，空间中也定义了距离，两点间的长度微元也是坐标微元的正定二次型，只是系数矩阵是坐标函数了．但弯曲空间从局部看来和欧氏空间是相当的，而空间的弯曲程度则由曲率张量来描叙．

如果再把距离函数的正定性取消，我们就得到洛伦兹流形．Einstein 用 3+1 维洛伦兹流形来描叙物理时空，从逻辑上看，比牛顿的绝对平直时空有两大优势：第一、平直时空是弯曲时空的一个特例，弯曲时空是比平直时空更广的概念，所以在逻辑上更可靠．第二、3+1 维的耦合时空具有 4 元数结构，是一个演化的活流形．其中的场方程相对容易解出，而且场量都是活的，物质具有了灵性．所以著名的前苏联物理学家朗道(Landau)说：广义相对论是最接近上帝的工作．

几何沿着连续性方向的进一步发展就是更为抽象的拓扑学．有些几何对象的特点并不需要具体的距离函数来描叙，而只涉及连续变化的等价性，即所谓同胚．如一个球体可通过连续变形变成一个立方体，但不能变成一个环．拓扑直接由衡量远近关系的开集定义，而开集之间只有一些纯粹的逻辑约束，而非数量关系．因此拓扑空间是比度量空间更广的概念，度量空间是拓扑空间的特例，开集可用开球的并集来定义．从逻辑上讲：越抽象的概念，涵盖面越大,结论的适用面越广，但结论越弱，无用的信息越多．

由上面的论述可以看到，数学概念的演化发展是有其内在逻辑的，并非凭空捏造出来的．由此我

们可得以下一些重要的启发：（1）好的数学理论都有现实背景，为抽象而抽象、或者很生僻的理论是走不了多远的，也没多少人感兴趣.（2）大自然是用最精致的数学理论设计的，高深的数学理论都扎根在这些基础之上.（3）就数学定理本身而言，只是阐明了概念之间的一些必然的联系和约束.所以希尔伯特说：以桌子、椅子、啤酒瓶取代几何中的点、线、面并没有什么不可，那只是给一个概念起一个名字的问题，重要的是这些概念之间的约束关系.在现代数学中广泛使用的‘同构’概念，就是希尔伯特思想的具体体现；而对量子物理中常用的‘类比方法’，其有效性的逻辑理由也正在于此.爱因斯坦(1879-1955)：“绝对静止概念，不仅在力学中，而且在电动力学中也不符合现象的特性.倒是应当认为，凡是对力学方程适用的一切坐标系，对于上述电动力学和光学的定律也一样适用，……我们要把这个猜想（即相对性原理）提升为公设，并且还要引进另一条在表面上看来同它不相容的公设：光在空虚空间里总是以一确定的速度传播着，这速度同发射体的状态无关.”

Einstein 是这样说的：“由于这种方法论上的不确定性，人们将认为这样就会有多种可能同样适用的理论物理学体系，这个看法在理论上无疑是正确的.但是物理学的发展表明，在某一时期里，在所有可想到的解释中，总有一个比其他的一些都高明得多.凡是真正深入研究过这一问题的人，都不会否认唯一决定理论体系的实际上是现象世界”（见《探索的动机》——Einstein 在普朗克生日宴会上的演讲）

两个惯性 S 和 S’之间的洛仑兹变换：

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$y'=y \qquad (1)$$
$$z'=z$$
$$t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

S’系沿 x 轴正向相对于 S 系以匀速 v 运动.

逆变换：

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$y=y' \qquad (2)$$
$$z=z'$$
$$t=\frac{t'-vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

同时的相对性：

$$dt'=\frac{dt-\frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (3)$$

反过来：

$$dt=\frac{dt'+\frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (4)$$

由此可看出，在 S’系中同时发生的事件，只要不在同一地点，在 S 系中看，这两件事就不同时发生.

运动时钟变慢：

$$dt=dt'/\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (5)$$

质能关系：

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (6)$$

相对论还指出，物质的质量和能量之间存在本质联系：

$$E=mc^2 \quad (7)$$

静止质量为 m_o 的物体具有能量 $E_0=m_0c^2$（8）

由（7）、(8)，可以算出运动物体的动能：

$$T=mc^2-m_0c^2$$
$$=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right) \quad (9)$$
$$=\frac{1}{2}m_0v^2+\frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2}+\ldots\ldots$$

闵可夫斯基把相对论写成四维时空的形式，从而把时空看成一个整体.

如果令 $x_0=ct,x_1=x,x_2=y,x_3=z$，洛伦兹变换可写为：

$$\begin{pmatrix}x_0'\\x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\-\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad (10)$$

式中 $\beta=v/c,\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$（11）

相对论中联系不同惯性系的坐标变换式洛伦兹变换，.在相对论中，矢量被定义为在洛伦兹变换下与坐标一样变的量，即如（10）那样变的量.

二阶张量被定义为在洛伦兹变换下按以下规律变化的量：

$$T'=aTa^{-1} \quad (12)$$

所有的力学量和电学量都可以写成张量，所有的力学规律（除万有引力外）和电磁学规律都可以写成张量方程.所以，除去万有引力定律外，力学规律和电磁学规律都满足洛伦兹变换和相对性原理，都符合相对论.

值得注意的是能量和动量一起可以构成四维动量：

$$P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

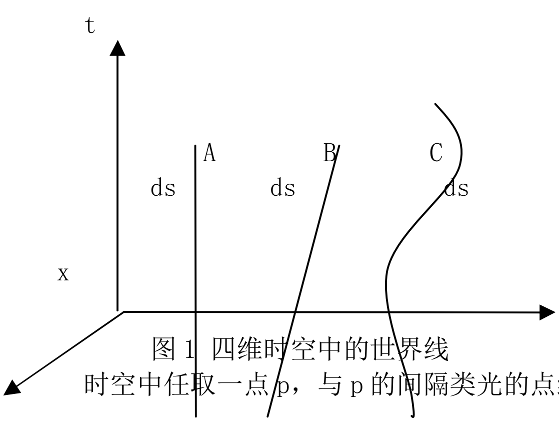
四维闵可夫斯基时空的一个点，用（t,x,y,z）四个坐标表示称为一个事件.三维空间的一个点，由于时间的不断发展，在四维时空中都会描绘出一根线.

图 1 中 A、B、C 三条世界线，A 描述三维空间中的一个不动点，B 描述一个匀速直线运动的点，C 描述一个变速运动的点.ds 为世界线上两点之间的“距离”.由于不可能画出时空的四个维度，所以没有画出 z 轴坐标描述的那一维空间.

在四维时空中，闵可夫斯基注意到了时间与空间的差异，考虑了光和质点的速度表达式，把四维时空两点之间的“距离”表示为：

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (14)$$

ds 通常称为两点的间隔.由于两点总可以用世界线相连，所以 ds 又可以看成世界线的线元. $ds^2 = 0$ 有



$$v^2 \equiv \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c^2 \quad (15)$$

表明从点 1 到点 2 的运动速度正好是光速，这段间隔正好描述光信号的运动，称类空间隔.

不难看出：

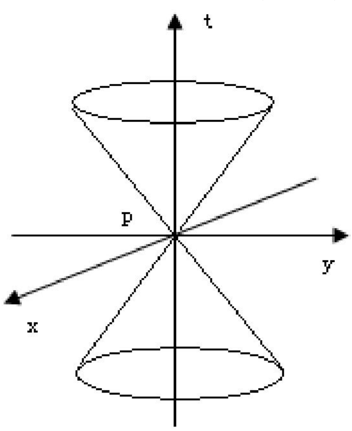
$ds^2 > 0 \Leftrightarrow v^2 > c^2$　　类空间隔

$ds^2 = 0 \Leftrightarrow v^2 = c^2$　　类光间隔

图 1　四维时空中的世界线

$ds^2 = 0 \Leftrightarrow v^2 = c^2$　　类时间隔

时空中任取一点p，与 p 的间隔类光的点组成如图 2 所示的锥面，成为 p 点的光锥.



光锥内部的点与 p 点的时间间隔都是类时的，与 p 点以亚光速信号联系.上半光锥内部点处在 p 点的未来，而下半光锥内部的点处在 p 点的过去.上半光锥上的点也处在 p 点的未来，从 p 点发出的光信号可以到达它们，下半光锥类似.

光锥外部的点与 p 点类空，只有超光速信号才能到达，或从它们到达 p.而相对论认为，光速是信号传递的最大速度，所以光锥外部的点与 p 点没有因果关系.

我们考察在 S 系中静止的一个质点.由于它在 S 系中不动，从空间看，是一个点，dx=dy=dz=0，（14）约化

$$-\frac{ds^2}{c^2} = dt^2 \quad (16)$$

图 2　　光锥图

由此我们定义

$$d\tau = i\frac{ds}{c} \quad (17)$$

为此质点的固有时间.

$$dt = \gamma(dt' + v\frac{dx'}{c^2}) = \gamma(1 + \frac{u_x' v}{c^2})dt'$$

$$\therefore a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{a_x'}{\gamma^3(1 + \frac{u_x' v}{c^2})^3}$$

同理 $$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{a_y'}{\gamma^2(1 + \frac{u_y' v}{c^2})^2} - \frac{a_x' \frac{v u_y'}{c^2}}{\gamma^2(1 + \frac{u_x' v}{c^2})^3}$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{a_z'}{\gamma^2(1 + \frac{u_x' v}{c^2})^2} - \frac{a_x' \frac{v u_z'}{c^2}}{\gamma^2(1 + \frac{u_x' v}{c^2})^3}$$

代入即得速度变换为

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad\qquad u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \xrightarrow{\text{逆变换为}v\to -v\text{得}} u_y' = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

$$u_z' = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad\qquad u_z' = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

加速度变换

$$du_x = \frac{du_x'}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} - \frac{u_x' + v}{(1 + \frac{u_x' v}{c^2})^2} \cdot \frac{v}{c^2} \cdot du_x'$$

$$= \frac{du_x'}{(1 + \frac{u_x' v}{c^2})^2}[1 + \frac{u_x' v}{c^2} - \frac{u_x' v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}] = \frac{du_x'}{\gamma^2(1 + \frac{u_x' v}{c^2})^2}$$

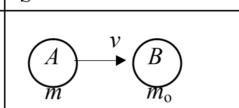
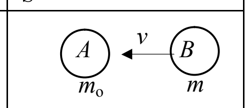
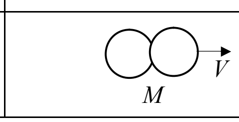
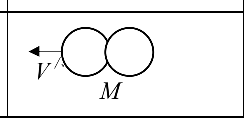
7、相对论中的质量与动量

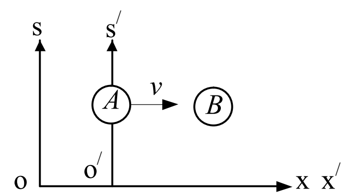
基本相互作用统一物理世界图象的方向是爱因斯坦在创立相对论的过程中开辟的. 他在解决牛顿力学和电动力学不协调矛盾中没有因循上述的归一思想，他不企图把力学现象和电磁学现象归结为其中任何之一，而是在一个新的时空构架中把两者统一起来. 他的狭义相对论实现了在运动学水平上的两者统一.

相对论质量公式的简单推导：

推导的依据：质量守恒(其实质是能量守恒)、动量守恒、洛伦兹速度变换.

设 S 系中有两个相同的球 A、B，其中 B 静止，A 以速度 v 与 B 发生完全非弹性碰撞.

	S	S′
碰前		
碰后		



S 系：质量守恒： $M = m + m_o$

动量守恒：$MV = (m + m_o)V = mv.........(1)$

所以有：$\dfrac{m + m_o}{m} = \dfrac{v}{V}...........(2)$

S′系：质量守恒： $M = m + m_o$

动量守恒：$MV = (m + m_o)V' = -mv.........(3)$

比较（1)、(3）得： $V' = -V..........(4)$

由洛伦兹速度变换：

$$V' = \frac{V - v}{1 - \frac{Vv}{c^2}} \qquad \therefore \quad V' = -V = \frac{V - v}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$$

$$\frac{v}{V} - 1 = 1 - \frac{vV}{c^2} = 1 - \frac{V}{v}\frac{v^2}{c^2}$$

将（2）代入上式：$\frac{m+m_o}{m}-1=1-\frac{m}{m+m_o}\frac{v^2}{c^2}$

所以有：$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 证毕.

爱因斯坦狭义相对论，是建立在所谓的惯性系统中的时空理论.惯性是狭义相对论存在的基础，因为在惯性系统内，做匀速直线运动的物体的数学物理方程，才满足线性迭加规律.Lorentz 在 1904 年已经推导出了电子的纵向质量与横向质量的公式[1]，它们分别是：

$$m_L = m / (1 - v^2/c^2)^{3/2} \quad (1)$$

以及

$$m_t = m / (1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (2)$$

爱因斯坦在他 1905 年的论文《论动体的电动力学》中也推导了电子的“纵”质量和“横”质量（原文中有引号）[2].《论动体的电动力学》的第 10 节“（缓慢加速的）电子的动力学”中，Einstein 讨论了这个问题.他从运动方程出发，经过洛伦兹—Einstein 坐标变换，得出了一组结果：然后保持“质量×加速度=力”的方程形式，通过比较而导出了电子的纵质量和横质量

$$m_L=\frac{m_o}{\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^3},$$

$$m_T=\frac{m_o}{1-v^2/c^2}.$$

式中 m_o 为物体的静质量.Einstein 所得到的纵质量 m_L 随速度变化的关系与洛伦兹的结果相同，可是横向质量公式写成：

$$m_t = m / (1 - v^2/c^2) \quad (3)$$

公式（3）与 Lorentz 的公式（2）不同.爱因斯坦在公式（3）下面有一段文字说明：

“采用不同的力与加速度的定义，我们自然会得到其它的质量值.这告诉我们，在比较电子运动的各种理论时，必须十分谨慎地进行.”

事实上，爱因斯坦在推导出电子的“纵”质量和“横”质量公式之前，已经明确写出了电子在电磁场中的运动方程式.他当时假定的作用在电子上的力，与 Lorentz 采用的力的定义是不同的.所以，爱因斯坦在 1905 年的论文中的“纵”质量公式（3）与 Lorentz 的公式（2）不同，在当时是允许的，也是可以理解的.

二十世纪初期，人们对于电子运动的研究是个新兴学科.当时物理学家注意到作用在电子上的力不仅与加速度有关，还与速度有关，这就需要对牛顿的第二定律（$F=ma$）的形式进行修改.在这种背景下，物理学家开始尝试性地提出“纵“质量和“横”质量的概念，然后，他们很快认识到这种提法不妥当，就着手从动量的新定义出发，对力的定义作出新的表述.

普朗克在 1906 年著文指出，如果将力表达成动量随时间的变化率，即 $\frac{d}{dt}(mv)$，再将动量分解成质量m乘以速度v，则得到相对论质量公式

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

形式上与洛伦兹的横质量相同，Einstein 在后来的论文中采用了这种对质量的新定义.

1909 年,有个叫 Bucherer 的德国物理学家证明了相对论质速关系的那个实验!

爱因斯坦在 1907 年发表了长篇论文:“关于相对性原理和由此得出的结论”[3],其中第三章是质点(电子)力学，他明确地写出了质点的动量表示式.如果采用现代的符号，质点的动量表示式为：

$$p = mv / (1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (4)$$

爱因斯坦进而把质点动力学方程中的力定义为：

$$F = dp/dt \quad (5)$$

相对论动量表示式(4)和力的定义公式(5)一直延用到今天.公式(5)是牛顿第二定律的推广形式. 值

得注意的是，爱因斯坦在 1907 年的论文中已经不再提及“纵”质量和“横”质量.

在相对论力学中，动量表示式（4）是个非常重要的定义，它是牛顿力学的动量定义的发展.在公式（4）中，相对论动量比牛顿力学的动量多了一项因子，$(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$，后来被称之为 gamma 因子.

在公式（5）中，质点受到的力不仅与加速度有关，也与速度有关.从公式（5），当质点的速度与加速度的方向平行，以及垂直时，可以作为特例分别推导出质点的“纵”质量和“横”质量.所以,“纵”质量和“横”质量没有普遍性的意义.

在相对论中，质点的总能量表示式为：

$$E = mc^2 / (1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (6)$$

当质点的速度为零时，公式（6）退化成著名的质能公式：$E_o = mc^2$，这里 E_o 代表静止质点的总能量. 注意，爱因斯坦在公式中对质量采用的符号是 m，等同于牛顿力学中的质量， 他很少采用静止质量的提法，也几乎不用符号（ m_o ）.

结合公式（5）和（6），可以得到质点的能量和动量关系式

$$(E/c)^2 - p^2 = m^2c^2 \qquad (7)$$

在公式（7）中，质量 m 是一个不变量，它在任何惯性系中都是相同的.现在教科书上，通常把 m 称为静止质量.

在教科书和科普读物上，把相对论质量 M（也称为动体质量）写成：

$$M = m / (1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (8)$$

公式（8）常常被称之为质速公式，当质点的速度增加时，质量会随着增大；当质点的速度趋向光速时，质量会增大到无限大.

通过公式（8），相对论动量公式（4）可以简写成 $p = Mv$；相对论能量公式（6）可以简写成 $E = Mc^2$，这是引入公式（8）的优点.由（7）、(8)，可以算出运动物体的动能：

$$\begin{aligned} T &= mc^2 - m_0c^2 \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

第一、四维洛伦兹变换和光速、以及光速不变紧密相连.它可以直接脱胎于电磁学，法国彭加勒是第一个给出该变换的人.该变换固有的适用范围就是四维性质的光电磁.光速不变——它的物理意义就是表述大范围的电磁空间是零曲率的空间.第二、四维洛伦兹变换不能适用于引力方程.洛伦兹变换几乎征服了物理学现有的每一个分支,就是偏偏征服不了引力学.20 世纪 30 年代后随着非线性和分维物理学分支的迅速广泛崛起，洛伦兹变换均被挡在门外.进一步地研究也发现引力空间是最简单的非线性空间——即不等于 0 的负曲率的空间.这样才划定了洛伦兹变换的适用范围是所有零曲率的空间的物理学分支.

在爱因斯坦之前，惯性质量，即物体对运动的惯性阻抗被认为是一个不可改变的量.这符合牛顿形而上学的机械自然观.１８９５年，奥斯瓦尔德在吕贝克自然科学家大会的报告中还提出质量不变的经典观点.时过不久，１９０１年实验物理学家在进行高速运动电子的实验时，发现电子的质量随着速度增加而变大.爱因斯坦在他的相对论中也论证了这一事实.

只要是运动物体的速度远低于光速，由于运动所引起的质量增加就不明显.因为在经典力学中，物体很大而运动速度很小，质量的增加往往被忽视.相反，在相对力学中，质量的增加起着重要作用.在其后的时期中，原子物理学家们在大型实验设备上，加速了基本粒子.这些实践证明爱因斯坦的学说是正确的.

（1）“质量的相对论变换”公式在 1906 年已明显地包含于 Max Planck 的论文（Verh.dtsch.phys.Gas.,1906,4:136）中，但未引起重视;

（2）R.C.Tolman 在 1911 年的论文（Phil.Mag.,1911,21:296）中详细地强调了此“质量的相对论变换”公式； R.C.Tolman 后来在他的书《Relativity Thermodynamics and Cosmology》(Oxford,London,1934,1946,1949,1950)中再次写出了此“质量的相对论变换”公式；

（3）A.Einstein 在 1935 年的论文“Elementary Derivation of Equivalence of Mass and Energy”(载 Bull.Amer.Math.Soc.,1935,61(4):223-230)中肯定并用到了此“质量的相对论变换”公式.

作为说明，W.Pauli 在其名著《Theory of Relativity》(Pergamon Press,1950）中写道，“质量的相对论变换”公式“现在是看作为质量的.这一质量依赖于速度的表达式是由 Lorentz 基于电子也在运动过程

中受到一 Lorentz 收缩这一假定，首先专门对电子的质量导出这个公式.……Lorentz 关于质量改变的定律可以从相对论导出，而不必对电子的形状或电荷的分布作任何特殊的假定，这是一大进步.公式（215）对各种质量均适用，所以不必对质量的性质作任何假定.” W.Pauli 在注释中特别提到了 M.Planck 和 R.C.Tolman 的工作.

吴大猷先生在其《相对论》一书中也特别提到了“质量的相对论变换”公式（p90）.吴大猷先生的推导过程与 R.C.Tolman 和 A.Einstein 完全一样.

“质量的相对论变换”公式是相对论中的一个重要公式，如果 Einstein 的文章中没有这个公式那倒是奇怪的.1911 年至 1934 的 25 年间，Einstein 正在从事广义相对论方面的工作，无暇在文章中提到这一公式也不奇怪.

参考文献

[1].Lorentz H A. Electromagnetic Phenomena in a system moving with any velocity less than that of light. Proc. Sec. Sci., 1904, 6: 809 －831. 中译：相对论原理[M]， 科学出版社，赵志田，刘一贯译，1989，6-30.

[2]. Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Korper, Ann. Phys., 1905, 17: 891-921.中译：论动体的电动力学[A], 范岱年等译，爱因斯坦文集[M] 北京：商务印书馆，1977，83-115.

[3]. Einstein A. Jahrbuch der Radioaltivitat und Elektronik, 1907, 4: 411-462.中译：关于相对性原理和由此得出的结论[A], 范岱年等译，爱因斯坦文集[M] 北京：商务印书馆，1977，150-209.

8、速度合成公式的思考

1、相对论速度变换

在 S 、S' 系上测某一质点在某一瞬时的速度

S 系上：
$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} ;\qquad S' \text{系} \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \dfrac{v}{c^2}x) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma(dt - \dfrac{v}{c^2}dx) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - \dfrac{v}{c^2}dx)} = \dfrac{\dfrac{dx}{dt} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{v_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}v_x} \\ v_y' = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{\gamma(dt - \dfrac{v}{c^2}dx)} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\gamma(1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt})} = \dfrac{v_y}{\gamma(1 - \dfrac{v}{c^2}v_x)} \\ v_z' = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{\gamma(dt - \dfrac{v}{c^2}dx)} = \dfrac{\dfrac{dz}{dt}}{\gamma(1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt})} = \dfrac{v_z}{\gamma(1 - \dfrac{v}{c^2}v_x)} \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} v_x' = \dfrac{v_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} v_x} \\ v_y' = \dfrac{v_y}{\gamma(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x)} \\ v_z' = \dfrac{v_z}{\gamma(1 - \dfrac{v}{c^2} v_x)} \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \\ v_y = \dfrac{v_y'}{\gamma(1 + \dfrac{v}{c^2} v_x')} \\ v_z = \dfrac{v_z'}{\gamma(1 + \dfrac{v}{c^2} v_x')} \end{cases} \qquad (17\text{-}11)$$

讨论： $v/c << 1$时，$\gamma \to 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x' = v_x - v \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} v_x = v_x' + v \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$$

洛伦兹变换$\to$伽利略变换.

2、速度合成公式

在以速度 v 沿 K 系的 X 轴运动着的 k 系中，设有一个点依照下面的

$\xi = \omega_\xi \tau$

$\eta = \omega_\eta \tau$

$\zeta = 0$

此处 ω_ξ 和 ω_η 都表示常数.

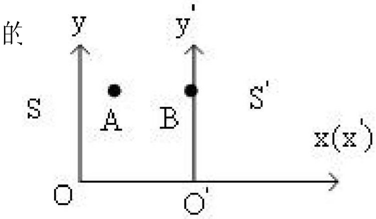


图17-6

求这个点对于 K 系的运动. 借助于§3 中得出的变换方程，我们把 x，J运动方程中来，我们就得到：

$$x = \frac{\omega_\xi + v}{1 + \dfrac{v\omega_\xi}{V^2}} t, \quad y = \sqrt{1 - (\frac{v}{V})^2} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{v\omega_\xi}{V^2}}\right) \omega_\eta t, \quad z = 0$$

这样，依照我们的理论，速度的平行四边形定律只在第一级近似范围内才是有效的. 我们令：

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\omega^2 = (\omega_\xi)^2 + (\omega_\eta)^2$$

和
$$\alpha = \arctan \frac{\omega_y}{\omega_x}$$
； [20]

α 因而被看做是 v 和ω两速度之间的交角. 经过简单演算后，我们得到：

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + \omega^2 + 2v\omega\cos\alpha) - (\dfrac{v\omega\sin\alpha}{V})^2}}{1 + \dfrac{v\omega\cos\alpha}{V^2}}$$

值得注意的是，v 和ω是以对称的形式进入合成速度的式子里的. 如果ω也取 X 轴（Ξ 轴 ）的方向，

那么我们就得到：$U = \dfrac{v+\omega}{1+\dfrac{v\omega}{V^2}}$，从这个方程得知，由两个小于 V 的速度合成而得的速度总是小于 V．因为如果我们置

$v = V- k$，$\omega = V- \lambda$，此处 k 和 λ 都是正的并且小于 V，那么：

$$U = V\frac{2V-k-\lambda}{2V-k-\lambda+\dfrac{k\lambda}{V}} < V$$

进一步还可看出，光速 V 不会因为同一个"小于光速的速度"合成起来而有所改变．在这场合下，我们得到：

$$U = \frac{v+\omega}{1+\dfrac{\omega}{V}} = V$$

当 U 和 ω具有同一方向时，我们也可以把两个依照§3 的变换联合起来，而得到 U 的公式．如果除了在§3 中所描述的 K 和 k 这两个坐标系之外，我们还引进另一个对 k 做平行运动的坐标系 k'，它的原点以速度ω在 Ξ 轴上运动着，那么我们就得到 x，y，z，t 这些量同 k'的对应量之间的方程，它们同那些在§3 中所得到的方程的区别，仅仅在于以

$$\frac{v+\omega}{1+\dfrac{v\omega}{V^2}}$$

这个量来代替"v"； 由此可知，这样的一些平行变换——必然地——形成一个群．

洛伦兹变换和爱因斯坦速度相加规建立在平直时空惯性参考系基础上，而现实世界中纯粹的惯性参考系是不存在的，在这种意义上狭义相对论应当被看成一种理想状态的理论．一般而言在有引力场存在的情况下，爱因斯坦速度相加规则仅是一个近似公式．但我们也知道，现有的关于光速不变的实验和观察都是在地球、太阳系和银河系的弱引力场空间范围内进行的．例如在地球绕太阳转动的轨道上完成的迈克耳逊-雷默干涉实验，对自转的太阳两边缘发出的光的观察【3】，对银河系内双星系统的光速的观察【4】，以及银河系内恒星和河外星系光行差现象的观察等等【5】．所有这些实验和观察都证明，即使在弱引力场和弱非惯性运动情况下，光的速度仍然与光源的运动状态无关，近似地满足爱因斯坦速度相加规则．

假设我们的旧相识，火车车厢，在铁轨上以恒定速度 v 行驶；并假设有一个人在车厢里沿着车厢行驶的方向以速度 w 从车厢一头走到另一头．那么在这个过程中，对于路基而言，这个人向前走得有多快呢？换句话说，这个人前进的速度 W 有多大呢？唯一可能的解答似乎可以根据下列考虑而得：如果这个人站住不动一秒钟，在这一秒钟里他就相对于路基前进了一段距离 v，在数值上与车厢的速度相等．但是，由于他在车厢中向前走动，在这一秒钟里他相对于车厢向前走了一段距离儿也就是相对于路基又多走了一段距离 w，这段距离在数值上等于这个人在车厢里走动的速度．这样，在所考虑的这一秒钟里他总共相对于路基走了距离 W=v+w．我们以后将会看到，表述了经典力学的速度相加定理的这一结果，是不能加以支持的;换句话说，我们刚才写下的定律实质上是不成立的．但目前我们暂时假定这个定理是正确的．（摘自《浅说》第 6 节、经典力学中所用的速度相加定理的全文）

在狭义相对论中，两惯性系相对速度 v 与 x_3 和 x_3' 平行

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 - vt\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ t' = t - (\dfrac{v}{c^2})x_3\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases} \qquad (1)$$

（x_1', x_2', x_3', t' ）为 K' 坐标系的坐标，（x_1, x_2, x_3, t ）为 $x_4' = ict'$ 坐标系的坐标，令 $x_4' = ict'$ ，

$x_4' = ict'$ ，所以变换矩阵为

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} & iv/c\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ 0 & 0 & -iv/c\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} & 1\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

如果 $x_1, x_2, x_3, x_4 \to 0$; $x_1', x_2', x_3', x_4' \to 0$,相对速度 v 不变，那么

$$\begin{cases} dx_1' = dx_1 \\ dx_2' = dx_2 \\ dx_3' = (dx_3 + i\dfrac{v}{c}dx_4)\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ dx_4' = (dx_4 - i\dfrac{v}{c}dx_3)\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases} \qquad (3)$$

比较 $(dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2) - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ 与 $dx_4'^2 - dx_4^2$

$$(dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2) - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = \frac{i^2\dfrac{v^2}{c^2}dx_4^2 + i\dfrac{v}{c}dx_4 dx_3 + \dfrac{v^2}{c^2}dx_3^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \qquad (4)$$

$$dx_4'^2 - dx_4^2 = -\frac{i^2\dfrac{v^2}{c^2}dx_4^2 + i\dfrac{v}{c}dx_3 dx_4 + \dfrac{v^2}{c^2}dx_3^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \qquad (5)$$

比较后知道（4）式=（5）式

$$(dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2) - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = -(dx_4'^2 - dx_4^2) \qquad (6)$$

相对论中速度合成公式 $V=(V_1 \pm V_2) \div (1 \pm V_1V_2/C^2)$，仅适用于同一直线上两个速度的合成.当物体的两个速度不在同一直线时，其合成公式又是怎样的呢？下面探讨一下当两个速度垂直时速度的合成，由于互相垂直 的两个速度互不影响，因此可从引力质量角度利用 Lorentz transformation 推导出来.

设物体的引力静止质量为 m_0，水平速度为 v_1，垂直速度为 v_2，合速度为 v，不妨设先有水平速度 v_1，此时引力质量为 m_1，由 Lorentz transformation 得 $m_1=m_0 \div (1- v_1^2 \div c^2)^{0.5}$，$m_2=m_1 \div (1- v_2^2 \div c^2)^{0.5}=m_0 \div (1- v_1^2 \div c^2- v_2^2 \div c^2+v_1^2 v_2^2 \div c^4)^{0.5}=m_0 \div (1- v_2 \div c^2)^{0.5.}$ ∴$V_2= v_1^2+v_2^2-v_1^2 v_2^2 \div c^2$，当 $v_1<<c, v_2<<c$ 时，$v_1^2 v_2^2 \div c^2 \to 0$，此时 $V^2= v_1^2+v_2^2$，这就是经典力学中正交速度合成公式.

在经典力学中速度合成公式为 $v=(v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\theta)^{0.5}$，在相对论中 $v_1^2+v_2^2$ 变为 $v_1^2+v_2^2-v_1^2 v_2^2 \div c^2$，可设其合速度公式为 $v=(v_1^2+v_2^2-v_1^2 v_2^2 \div c^2+X\cos\theta)^{0.5}$，令 $\theta=0$，解得 X，代入上式得到合速度的计算公式.当 $v_1<<c, v_2<<c$ 时，$v_1^2 v_2^2 \div c^2 \to 0$，也可以回到经典力学中的速度合成公式，在此从略.这也符合量子力学的对应原理.由于整个宇宙形成的绝对空间不存在运动问题，因此相对论中的速度合成公式，仅适用于有限多个合成，不适用于无限多个.

早在二十世纪初，人们就已经对 Einstein 相对论力学和 Newton 力学的数学结构做了最透彻的研究.其研究后果之一就是把 Newton 力学与 Galileo 抛物几何空间【1】相对应；把 Einstein 相对论力学与 Minkowski 双曲几何空间【2】相对应；直言之，Galileo 惯性运动变换群确定了 Newton 力学空间为非 Euclid 性质的 Galileo 抛物空间；而 Lorentz 惯性运动变换群确定了 Einstein 相对论力学空间为非 Euclid 性质的 Minkowski 双曲空间.古新妙先生认为：因为牛顿力学意义下的速度与相对论力学意义下的速度并不相同，各

自满足不同的加法公式，牛顿速度满足的加法公式是：

$$U' = U + u \qquad (1)$$

而相对论速度满足的加法公式是：

$$V' = \frac{V + v}{1 + \dfrac{V \cdot v}{c^2}} \qquad (2)$$

从牛顿速度到相对论速度之间存在如下的映射关系：

$$V' = c \cdot th\frac{U'}{c} \qquad V = c \cdot th\frac{U}{c} \qquad v = c \cdot th\frac{u}{c} \qquad (3)$$

这里的映射关系由双曲正切函数来实现. 双曲函数的定义如下：

双曲正弦：$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，　双曲余弦：$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，　双曲正切：$thx = \dfrac{shx}{chx}$.

双曲正切具有下列性质：$th(x+y) = \dfrac{thx + thy}{1 + thx \cdot thy}$.

从牛顿速度加法公式（1）转换到相对论速度加法公式（2），是双曲正切的功劳，是相对论的奥秘.

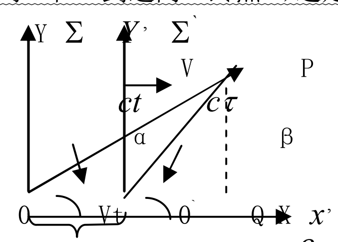
下面是杨金城先生的认识：

定义：什么是相对论？相对论，就是“研究相对运动系统内，物质运动变化规律的科学理论.” 什么是相对论的时空变换？“就是分别在相对运动系统中，测量同一事件的时间和空间之间的关系”，就是相对论的时空变换. 我们的相对论，是以相对性原理为基础，光作为信息传递的使者，在动态平衡系统中建立起来的时空理论.

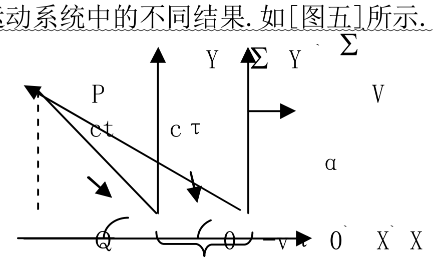
以下二图，在 τ=t=0 时，系统Σ' 和Σ都重合. 当Σ' 相对于Σ以速度 V 向右运动的同时，从原点射出一光信号. 光在Σ系统中经过时间 t，在Σ' 系统中经过时间 τ 到达的同一点 P. 光从原点出发，在相对运动的不同系统中，分别经过时间 t 和 τ 到达同一终点 P，这是同一事件在相对运动系统中的不同结果. 如[图五]所示.

[图三]

β



[图四]



从[图三]可得：　$ct\cos\alpha - vt = c\tau\cos\beta$ ----（a）　　$ct\sin\alpha = c\tau\sin\beta$ ----（b）

将（a）（b）两式平方后相加得：$c^2t^2 - 2cvt^2\cos\alpha + v^2t^2 = c^2\tau^2$ -----（c），

对（c）作移项整理得：　$\dfrac{\tau}{t} = \sqrt{1 - \dfrac{2v}{c}\cos\alpha + \dfrac{v^2}{c^2}}$ ----（2）

[图四]是改变光（运动物质）的传播方向得出下列结果：

$-c\tau\cos\beta - (-v\tau) = -ct\cos\alpha$ ---（c）　　$ct\sin\alpha = c\tau\sin\beta$ ---（d）

将（c）和（d）两式平方后相加：$c^2\tau^2 - 2cv\tau^2\cos\beta + v^2\tau^2 = c^2t^2$

经整理得：　$\dfrac{t}{\tau} = \sqrt{1 - \dfrac{2v}{c}\cos\beta + \dfrac{v^2}{c^2}}$ ----（3）

相对论新论的时空变换，具有鲜明的方向特征.

（A）　当$\alpha = o$时，$\dfrac{\tau}{t} = 1 - \dfrac{v}{c}$　　（B）　当$\alpha = \pi$时，$\dfrac{\tau}{t} = 1 + \dfrac{v}{c}$　　（纵向相对论公式）

（C）　当$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\tau}{t} = \sqrt{1 + \dfrac{v^2}{c^2}}$　　（D）　当$\beta = \dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\tau}{t} = \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c_2}}$　　（横向相对论公式）

（2）式和（3）式，都是相对论新论时空变换的一般表达式.它们都将纵向相对论，横向相对论的时空变换都包含在其中.并充分揭示出了相对论时空变换的方向特征，这是 Einstein 狭义相对论没有结果.Einstein 的狭义相对论仅考虑了平动的相对论效应，没考虑转动的相对论效应.

参考文献：

【1】Galileo 几何 H. Beek 最小曲面的几何学，Sitzungsber. Leipziger Berliner Math. Gee.12:14-30,1913 L. Silberstein, Galileo 时空中的射影几何 ，Philos. Mag. 10: 1925 Makarova, N., M., Tow-dimensional Noneuclidean Geometry with Parabolic Angle and Dissertation, Leningrad, 1962

【2】Minkowski 几何 A. Einstein 关于相对性原理和有此得出的结论 Einstein 文集 第二卷 商务印书馆出版，1977 J. D. Jackson, Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons Books Lnc. 1975 Shervatov, V. G.., Hyperbolic Functions. Heath, Boston,1963

【3】 狭义相对论入门，叶壬葵，厦门大学出版社，317，(1988).

【4】. P. de Bernardis at al, Nature, 404, 955 (2000). Merments C. L., et al, Astrophys, J., Suppl., 148, 1 (2003).

【4】 S. 温伯格，引力论和宇宙学，科学出版社，478 (1984).

9、狭义相对论的意义

对称原理与方向和向量的关系非常密切,例如根据对称原理把 Maxwell 方程组 20 个方程式写成 4 个方程式，通过方程式精简化，才可以把电磁学发展到更基本、更深入的程度.Maxwell 的成就在于将当时所有已知的电磁知识集中于四个方程中：

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Maxwell 方程组的 Lorentz 对称性在于：如果我们进行 Lorentz transformation，方程组仍然具有 transformation 以前的形式.在麦克斯韦电磁理论中，有关系式：$\mathrm{rotH}=J+\frac{\partial \mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ ①, $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ ②,式①是电场变化产生磁场的数学表达.可以看出，电场变化(原因)可用导数的形式来表达，磁场强度 H(结果)与电位移导数 $\partial\boldsymbol{D}/\mathrm{d}t$ 有关.即结果与原因的导数形式有关.式②是磁场变化产生电场的数学表达.可以看出，磁场变化(原因)可用导数形式表达为 $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$，电场强度 E(结果)与磁感应强度 B 的导数形式 $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 有关.即结果与原因的导数形式有关.在数学上简直美得像一个奇迹，仿佛出自上帝之手！

如果我们再联系法拉第电磁感应定律 $E_i=-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$，相对论动力学基本方程 F=d(mv)/dt，以及导数的含义，参照前面的结论，我们就可以给出原因与结果之间的数学关系： $f_{(结果)}=f'_{(原因)}$,通常简化为 因果关系： $f_{(果)}=f'_{(因)}$.有了因果关系：$f_{(果)}=f'_{(因)}$，如果我们知道某个事件发生的原因，我们就可以求出该原因产生的结果.一位法国物理学家曾经这样评价爱因斯坦："在我们这一时代的物理学家中，爱因斯坦将位于最前列.他现在是、将来也还是人类宇宙中最有光辉的巨星之一"，"按照我的看法，他也许比牛顿更伟大，因为他对于科学的贡献，更加深入地进入了人类思想基本要领的结构中."

居里夫人在 1911 年写的一封推荐信中说："爱因斯坦先生是我们相知中最富有创造力的人才……我们对他至为敬佩的是他能驾轻就熟地调整自己的思路以适应新出现的概念，并从中引申出所有可能的结论.……" 霍金，是当今享有国际盛誉的理论物理学家.在他为迎接新世纪而写的《相对论简史》一文中，对爱因斯坦的推崇达到了无以复加的地步："在过去的一百年中，世界经历了前所未有的变化.其原因不在于政治，也不在于经济，而在于科学技术——直接源于先进的基础研究的科学技术.没有科学家能比爱因斯坦更代表这种科学的先进性."

Einstein 是本世纪初物理学学革命的巨人.海森伯在谈到 Einstein 的贡献时说,他"有点像艺术领域中的达•芬奇或者贝多芬，Einstein 也站在科学的一个转折点上，而他的著作率先表达出这一变化的开端；因此看来好像是他本人发动了 20 世纪上半期所亲眼目睹的革命." 2005 年 4 月 15 日在北京举行的"世界物理

年纪念大会”上，诺贝尔物理学奖获得者、美国纽约大学石溪分校和清华大学教授杨振宁作了首场大会报告. 他说：“爱因斯坦是一位孤独的物理学家，他不怕别人对他的批评和不同意，并坚持自己的想法.”“爱因斯坦是 20 世纪最伟大的物理学家，他和牛顿是有史以来人类社会最伟大的物理学家.”“爱因斯坦将对 21 世纪的理论物理产生重要影响.”

沈惠川教授在《我的世界线：相对论》中指出:“Einstein 和相对论成了我的信仰，并成了我自己的一部分.在物理学中，能够永远站得住脚的，除了分析力学（包括 Lagrange 力学，Hamilton 力学和 Birkhoff 系统动力学），热力学外，就是相对论（包括狭义相对论和广义相对论，或称为特殊相对论和一般相对论）. 这三门学问可说是物理学中的“铁三角”，是其它物理学科必须遵守的约束条件；是物理中的物理，是物理中的哲学.其余的学问，包括量子力学在内，都是在变化的，不一定全对.……相对论要求一直是我审视其它文章（包括自己文章）的基本标准.相对论要求一直是我审视所有的物理学文章的基本标准. ”

相对论是现代物理学的重要基石，普朗克认为相对性原理在物理学界所引起的广度和深度，惟有引入哥白尼世界体系所导致的革命与之媲美.它的建立是 20 世纪自然科学最伟大的发现之一，对物理学、天文学乃至哲学思想都有深远的影响.相对论是科学技术发展到一定阶段的必然产物，是电磁理论合乎逻辑的继续和发展，是物理学各有关分支又一次综合的结果.相对论经迈克耳逊—莫雷实验、洛伦兹及爱因斯坦等人发展而建立. 李醒民在评论相对论这座美仑美奂的人类精神的伟大建筑物时这样写道：相对论犹如一座琼楼玉宇，其外部结构之华美雅致，其内藏观念之珍美新奇，都是无与伦比的.相对论的逻辑前提是两条在逻辑上再简单不过的原理，它们却像厄瑞克泰翁庙的优美的女像柱一样，支撑着内涵丰盈的庞大理论体系而毫无重压之感.其建筑风格是高度对称的，从基石到顶盖莫不如此.四维时空连续统显示出精确的贯穿始终的对称性原理，也蕴涵着从日常经验来看决不是显而易见的不变性或协变性.空时对称性规定着其他的对称性：电荷和电流、电场和磁场、能量和动量等的对称性.正如韦尔所言，整个相对论只不过是对称的另一个方面；四维连续统的对称性（不变性）、相对性或齐性首次被爱因斯坦描述出来，相对论处理的正是四维空时连续统的固有对称.在这样高度对称的琼楼玉宇中，又陈放着诸多奇异的观念——四维世界、弯曲时空、广义协变、尺缩钟慢等——从而通过均衡中的奇异显示出更为卓著的美！

12/21/2014