

机械能守恒定律是质点动力学规律

-----力学相对性原理与机械能守恒定律的关系研究综述

Li Xusheng

1922538071@qq.com

摘要: 分析了在研究机械能守恒定律与力学相对性原理的关系时需要准确理解的十个问题,正是这些问题造成了长期的争论,建议力学教材明确指明,尤其是势能定义最基本,根据势能定义推导惯性系中势能的一般公式,外势能不具有伽利略变换的不变性,最后给出一个简要的一般性证明——机械能守恒定律满足力学相对性原理,也具有单独的协变性,牛顿定律满足伽利略变换是机械能守恒定律满足伽利略变换的充分条件. [Li Xusheng. 机械能守恒定律是质点动力学规律-----力学相对性原理与机械能守恒定律的关系研究综述. *Academ Arena* 2015;7(11):75-79]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 8. doi:[10.7537/marsaaj071115.08](https://doi.org/10.7537/marsaaj071115.08).

关键词: 机械能守恒定律; 力学相对性原理; 势能公式; 势能定义

力学相对性原理是指任何惯性系在牛顿动力学规律面前都是平等的,机械能守恒定律是动力学规律,是牛顿定律的推论,理应满足力学相对性原理,然而力学教学界对于这个问题并没有取得一致的观点.机械能守恒定律与力学相对性原理之间的关系是一个古老而又宽泛的问题,至于从何时开始讨论,不好查证,文献[1]、[2]是笔者所能查到的最早文献.下面就研究过程中出现的问题以及对于力学教学的启示简要总结如下,期望得到力学教学界各位专家的指导.

1、力的作用点问题

力的大小、方向和作用点是力的三要素,但是我们必须本质地看待力的作用点问题,根据牛顿第二定律力必须作用在有质量的点上,因此在研究弹簧振子和单摆问题中必须注意这个问题.在弹簧振子问题中,一般不考虑弹簧质量(如果考虑弹簧质量,在各个惯性系机械能都不守恒,就不是弹簧振子了,这与实验中的弹簧是有区别的,实验中的弹簧由于具有质量同时具有动能和势能),因此弹力的作用点是振子(或者说小球),而不是弹簧.不少人错误地认为弹力的作用点在弹簧,才导致了这个问题争论了30多年^{[3][4][5]},弹簧振子问题类似于重力场,我们一般不把地球对于重力场的作用力和重力场对于物体的作用力看做两个力重复计算,单摆问题中我们也不把悬挂点对于摆线的作用力和摆线对于摆锤的作用力看做两个力,因为摆线也不考虑质量.有人认为尽管弹簧没有质量,也可以作为作用点,内部的力平衡,显然是错误的,没有质量哪来的内部?墙壁的作用力和内力除非始终是平衡力,否则加速度会出现无穷大,即使是平衡力各点都匀速运动,这显然不符合现实.在弹簧振子问题中势能应该表述为振子的势能,不要表述为弹簧的势能.关于功的定义曾经有两种说法——质点的位移与力的标量积、力

的作用点与力的标量积,如果考虑到力的作用点必须具有质量,二者是一致的,文献[3]也认可“质点的位移与力的标量积”.

2、势能的零点问题

根据力学相对性原理,在计算势能时势能的零点应该相对于观察者不变,而不是相对于力源不变,例如在一个相对于地面匀速上升的封闭的电梯内,一个观察者看到一个小球从电梯的顶端落下,碰到电梯底部后发生弹性碰撞,如果不考虑空气阻力等因素,理想状况下小球将不断运动下去,观察者看不到外面的情况,势能的零点只能相对于他自己不变,不知道小球距离地面的高度以及电梯相对于地面的速度.在万有引力问题中虽然我们一般选择无穷远点为势能的零点,但是在各个惯性系起始时刻势能的确定相当于选择了零点,在各自的坐标系里势能的计算都应该以它为标准.实际上在一个坐标系里只要任何一点的势能确定,其他任何一点的势能便随之确定.一般情况下在一个惯性系里选择了势能零点,在另一个惯性系里最好用它的伽利略像点,并不是选择其他点不行,只要相对于观察者不变即可.

3、保守力的认识

大学力学里的保守力一般只提重力(包括由于重力产生的浮力)、弹簧弹力和万有引力,其实除了这三种保守力外有些弹力也是保守力,例如斜面的支持力、摆线的拉力、匀速圆周运动的约束力、静摩擦力、理想流体的压力等.保守力是有势力的一种——不显含时间,在伽利略变换中力是伽利略变换的不变量,包括力场的性质不变,在一个惯性系中某个力不显含时间,在另外的惯性系中也一定不显含时间,例如在自由落体问题中匀速上升的电梯系中我们不能计算势能时是显含时间的力,利用动能定理(动能定理满足伽利略变换这个问题没有争议)求动能时不是显含时间的力,前后不自洽.场或者说

力的坐标与质点的坐标不一样,不能混为一谈,运动质点(小球)的坐标随时间变化,不是场力 F 随时间变化,重力、弹簧弹力和万有引力等都是稳定场,不是显含时间的力场.在机械能定理中可以有显含时间的力,在机械能守恒定律中不能有显含时间的力.由于牛顿力学适用于绝对时空,因此场或者力的坐标必须是相对于力源静止坐标系里的坐标(因此力是伽利略变换的不变量包括力场的性质不变),质点坐标是观察者坐标系里的坐标,这一点和相对论不同,在相对论中场的坐标和质点坐标都是观察者坐标系里的坐标,伽利略变换和洛伦兹变换在这一点上是有区别的,不能仅仅看做是洛伦兹变换的低速近似,伽利略变换只研究质点坐标,不研究场(或者力)的坐标.

设定 F 为在空间任意位置定义(或空间内单连通的区域)的矢量场,假若它满足以下三个等价的条件中任意一个条件,则可称此矢量场为保守矢量场:

$$\textcircled{1} F \text{ 的旋度是零: } F \times \nabla = 0$$

$$\nabla \times F = -\nabla \times \nabla \Phi = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}\right)\hat{y} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}\right)\hat{z} = 0$$

所以,第一个条件是正确的.

因此这三个条件彼此等价.由于符合第二个条件就等于通过保守力的闭合路径要求,所以只要满足上述三个条件的任何一条件,施加于粒子的作用力就是保守力.由于力的旋度具有伽利略变换的不变性,所以保守力的保守性具有伽利略变幻的不变性.

机械能守恒定律是质点动力学规律,在机械能守恒定律中的保守力是指质点受到保守力的合力,严格讲在斜面和单摆问题中不是重力机械能问题,因为此时质点受到的合力不等于重力,不过在相对于斜面和单摆悬挂点静止的坐标系里计算的结果和重力机械能计算结果相同,因为另外一个保守力不做功^[4](正因为如此人们才误认为是重力机械能问题),但是在相对于该坐标系匀速运动的坐标系里这个保守力做功,同时改变了质点的动能和势能,不改变质点的机械能.如果看做是重力机械能问题必须把另外一个保守力的做功去掉(即把这个力看做外力),否则就不满足力学相对性原理了.

4、惯性系与惯性力

惯性力是指:当物体有加速度时时,物体具有的惯性会使物体有保持原有运动状态的倾向,而此时若以该物体为参考系,并在该参考系上建立坐标系,看起来就仿佛有一股方向相反的力作用在该物体上

②假设粒子从某闭合路径 C 的某一位置,经过这闭合路径 C ,又回到原先位置,则力矢量 F 所做的机械功 W 等于零:

$$W = \int_C F \cdot dr = 0$$

③作用力 F 是某位势 Φ 的梯度: $F = -\nabla \Phi$

① \Rightarrow ②: 设定 C 为任意简单闭合路径,即初始位置与终结位置相同、不自交的路径.思考边界为 C 的任意曲面 S .斯托克斯定理表明 $\int_S (\nabla \times F) \cdot da = \int_C F \cdot dr$.假设 F 的旋度等于零,方程左边为零,则机械功 W 是零,第二个条件是正确的.

② \Rightarrow ③: 假设对于任意简单闭合路径 C , F 所做的随体功 W 是零,则保守力所做于粒子的随体功,

$$\Phi(x) = -\int_o^x F \cdot dr$$

独立于路径的选择.设定函数

其中, x 和 o 分别是特定的初始位置和空间内任意位置.根据微积分基本定理, $F(x) = -\nabla \Phi(x)$.所以第三个条件是正确的.

③ \Rightarrow ①: 假设第三个条件是正确的.思考下述方程:

令该物体在坐标系内发生位移,因此称之为惯性力.因为在经典力学里惯性力实际上并不存在,实际存在的只有原本将该物体加速的力,因此惯性力又称为假想力.这个概念的提出是因为在非惯性系中,牛顿运动定律并不适用.

惯性系是指牛顿定律成立的坐标系,在地面上做力学实验我们一般默认地面系是惯性系,那么相对于地面匀速运动的小车系或者说电梯系都是惯性系,惯性系里测量不到惯性力,在这样的坐标系里利用惯性力解释问题都是错误的.我们在默认地面系是惯性系的同时,已经默认了地球的质量充分大,忽略其能量的变化,因此研究机械能守恒定律与力学相对性原理关系时两个惯性系都不应该考虑地球能量的变化.我们不能研究伽利略变换时,地面系和电梯系都是惯性系,考虑能量变化时都是非惯性系,前后必须做到自洽.现在世界上所有的仪器还达不到考虑由于地球的质量不是充分大导致的系统误差,仅仅太阳照射的阳光对于地球的能量影响也比实验中的质点对于地球的能量影响大得多,我们不能说为了一个实验让太阳不发光.质点的运动对于地球动能的影响远远小于地震、海啸、山川、河流、地铁以及汽车的运行等地面因素,也远远小于太阳的电磁辐射、太阳宇宙线、太阳风、行星际磁场、银

河宇宙线、微流星体等地外因素的影响。如果考虑这些因素，所有的力学教材都需要修改，问题就复杂了。由于我们不知道地球的具体质量，其实地球的质量是一个变量，宇宙中的星体尤其是太阳不断向地球辐射粒子，地球也向外辐射粒子，还有陨石的出现等因素，这样将导致不可知论。

满足力学相对性原理即动力学规律满足伽利略变换，不研究非惯性系之间的变换规律，自由落体运动(其他类似)按照两体问题处理由于此时地面系和电梯系不是惯性系，与问题讨论无关。伽利略变换只研究惯性系，不研究近似惯性系，实验中是近似惯性系(可能有多方面的干扰)，理论中是严格惯性系。

在自由落体问题中若按照两体问题计算，地面系也不守恒，因为质点除了受到重力外，还受到一个惯性力 $-m^2g/M$ ，尽管比较小，此时地面系也不守恒，只能是近似守恒(由于是理论推导，在这里不能取近似值；如果取近似值在电梯系也取近似值，惯性力对地球所作功率是 mgV_0 ，此时惯性力的功尽管比上面要大很多，但是相对于此时地球的动能而言依然是非常小的，显然也可以忽略(近似计算是按照忽略量在总值中的比例，不是按照忽略量的绝对值)，不能袒护一方，此时机械能也守恒，守恒值为地球的动能，因为质点的动能和势能相对于地球的动能而言极小。

5、内势能与外势能的关系

“势能属于系统”理论上没有错误，尤其是内势能问题(例如分子势能)，但是当相互作用的两个物体质量相差极大——例如在自由落体问题中，经过计算可知质点的运动对于地球能量的变化微乎其微，系统相对误差在 10^{-25} 至 10^{-26} 范围内，不仅远远小于空气阻力的影响，也小于重力加速度变化产生的误差，甚至小于狭义相对论效应，完全可以忽略，我们在地面系计算重力势能时忽略了地球能量的变化，在电梯系也必须忽略——量变引起了质变。

“重力势能属于地球和物体”理论上没有错误，但是没有实际意义。“重力势能属于物体是一种通俗的说法”表述错误，应该是一种精确度极高的表述，换句话说“物体由于被举高具有的能量叫重力势能，重力势能属于物体”可以认为完全正确。在弹力问题中，如果弹簧连接两个质量差不多的物体按照内势能计算，内势能具有伽利略变换的不变性，弹簧与地面相连，必须按照外势能计算。在研究机械能守恒定律与力学相对性原理之间的关系一定注意要么都按照内势能计算，要么都按照外势能计算，前者必须以系统的质心为参照系，后者以质量相对极大的物体为参照系，一定做到自治。对于内势能而言，一对保守力做功等于势能的减少，例如分子势能，需要两个位形坐标表示；对于外势能，一个保守力做功等于势能的减少(另一个保守力做的功因为极其

微小忽略)，因此只需要一个位形坐标即可，另一个坐标可以视为坐标原点；内势能也可以看做质心为参照系两个质点的外势能。^[6]一对保守力的功等于两质点外势能之和的增量的负值，一个保守力的功等于一个质点外势能的增量的负值。在弹簧振子问题势能应该是振子的势能，类似于自由落体，不要误认为是弹簧的势能。周衍柏《理论力学教程》(1979年第一版，人民教育出版社)第47页“由于物体间相对位置发生变化所具有的能量，通常叫做势能。”这里势能应该是指内势能，具有伽利略变换的不变性，因为参照系的匀速运动同时改变两个质点的势能，但是它们的总势能没有变化。不能把它当做势能的定义，例如一个物体被悬挂起来，与地面比较相对位置发生了变化，但是物体不具有做功的能力，因此也不应该说具有势能。关于内势能的机械能守恒定律满足力学相对性原理力学界是取得共识的^[7]，外势能的机械能守恒定律也满足力学相对性原理，不过此时势能与观察者有关^[8]，动能也与观察者有关，对于不同的惯性系中的观察者机械能都是守恒的，只不过守恒量不相同。

6、势能是位置的函数

以弹簧振子为例，在小车系对任一点 x_1 ，尽管不同时刻场的强度是变化的，我们设力用 $F(x_1, t)$ 表示，不同时刻保守力做的功为 W ，则

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x_1, t) dx'$$

$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x_1, t) dx'$ ，根据势能的定义，该点的势能不变，因此势能是位置的函数，所以势能具有相对性。速度是相对的，所以动能也是相对的。实际机械能也是相对的，两坐标系“守恒量”不相等，

$$E' = E + \frac{1}{2} mu^2.$$

7、势能定义与势能公式之间的关系

纵观50多年来关于机械能守恒定律与力学相对性原理关系的讨论可以发现，在弹力、重力和引力机械能问题根据势能定义求解的是满足力学相对性原理，根据经典势能公式求解的不满足力学相对性原理。由于势能本质是用保守力的功定义的，而保守力的元功是坐标函数的全微分、可积分的，积分值为末态始态之差与积分路径无关，因此外势能也具有相对性。在经典力学教材中我们一般都是根据势能定义推导势能公式的，因此势能定义比公式更基本，以弹性势能为例(重力势能和引力势能也存在类似问题，本文不再说明)， $E_p(t) = \frac{1}{2} kx^2 - m\omega u \sin(\omega t) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - m\omega u \sin(\omega t) = \frac{1}{2} kx^2 + mv \cdot u$ 应该是弹簧振子中弹性势能的一般公式(参考系相对于地面变速运动也可以得出一个势能公式，但是此时测量的机械能不再守恒，不是本文的

研究范围,在此从略),没有否定经典的弹性势能公式,原来的公式只是一个特例——观察者在弹簧弹力方向上没有位移或者说分速度为0(相对于固定点静止或者垂直于弹力方向上匀速运动),不能认为弹性势能对于所有的观察者都相同,需要根据“物体的势能增加量等于物体克服保守力做的功”重新

计算(万有引力势能 $E_p = \frac{mGM}{r}$ 、重力势能类似 $E_p = mgh + mv \cdot u$),

对于外势能而言, $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ 、 $E_p = \frac{mGM}{r}$ 和 $E_p = mgh$ 仅仅适用于观察者在保守力方向上的分速度始终为0时的情形,当观察者在力的方向上分速度不相等时,计算保守力做的功不相等,因此势能差也应该不相等,这说明势能一样具有相对性,这是经典力学在公理化的过程中向前迈进的一小步.现在不少的力学教材没有指明这一点,认为势能差是绝对的,与观察者无关^[9].

经典的势能公式对于内势能成立——内势能具有伽利略变换的不变性.不少人认为经典的势能公式适用于所有的惯性系,在功能原理中排斥外势能的存在,认为都是内势能,但是在地面系按照外势能计算,是造成这场持续半个多世纪争论的重要原因.

8.注意区分力学相对性原理和狭义相对论性原理

按照一般理解,相对性原理对物理方程所提出的要求(或所加的限制)就是协变性要求(限制).力学相对性原理要求力学定律对于伽利略变换是协变的,即经伽利略变换形式不变.狭义相对性原理要求物理定律对于洛伦兹变换是协变的,即经洛伦兹变换形式不变.因此可以说相对性原理就是协变性要求.若某定律服从相对性原理就说它满足协变性要求.机械能守恒定律满足伽利略协变性不满足洛伦兹协变性,或者说它满足力学相对性原理不满足狭义相对性原理.从历史上看,把相对性原理简称为协变性要求是从狭义相对论开始的.后来人们干脆把相对性原理称为协变性原理.

爱因斯坦要求“绝对时空”里的“相对性原理”是无特殊参考系的,所以“洛伦兹变换”无特殊参考系.而“绝对时空”里同样有“运动规律在所有参考系里都有相同的形式”、“物理规律的公式形式与坐标系无关”的规律,所以“绝对时空”里同样有“(伽利略)相对性原理”,无特殊参考系的“伽利略变换”是其数学形式.

“绝对时空”里的力学、电磁学等一切公式形式只有满足“伽利略变换”才能在“绝对时空”里自治,这从另一方面证明“伽利略变换”就是“绝对时空”里无特殊参考系的“(伽利略)相对性原

理”的数学形式.因此,“绝对时空”与“相对时空”里都有各自对应的“相对性原理”,它们都是各自时空里的“运动规律在所有参考系里都有相同的形式”、“物理规律的公式形式与坐标系无关”理论,只是各自对应的数学形式不一样;所以两个时空有本质的区别.

9.分清主要因素与次要因素之间的关系

在实验过程中,影响实验结果的因素有很多,我们必须抓住主要矛盾,以自由落体运动为例说明.在实验过程中存在空气阻力,不仅在竖直方向存在,而且在水平方向空气的流动对于实验的结果都有影响,而且影响结果并非极小,由于自转的影响,落体还有微弱的偏东现象,电梯的顶端和底端重力加速度还有微弱的变化,实验室周围汽车的行驶等都对于实验的结果存在变化,但是我们在这里仅仅是理论分析,忽略这些因素,有些因素影响极小我们根本测量不出来.在其他实验中也存在类似问题,例如无质量的弹簧我们根本做不出来,单摆的摆线不可能没有质量,也并不是绝对不能伸长.上面谈及的这些因素显然远远大于实验过程中对于地球能量的变化对于实验结果的影响,所以在分析过程中也应该忽略这些影响,这是理想化模型,无论是地面系还是电梯系(或者小车系)看做严格的惯性系,不能看做两体问题,按照非惯性系处理.根据唯物辩证法的观点我们应该抓主要矛盾,不能甲做自由落体实验地面系是非惯性系,乙做弹簧振子实验地面系是惯性系.当初牛顿也是在忽略这些次要因素的前提下建立经典力学体系的,今天我们仍然可以忽略这些次要因素.在非惯性系中研究机械能守恒问题与力学相对性原理无关,力学相对性原理仅仅针对惯性系而言.

10.简要证明与主要结论

文献^[10]证明了在自由落体运动和斜面问题中机械能守恒定律满足伽利略变化,文献^[11]说明弹性势能机械能守恒定律满足伽利略变换,文献^[12]论证了在引力机械能守恒定律满足伽利略变换.机械能守恒定律成立的条件其实非常简单——只有保守力做功,这一点其实早已经取得了共识的,后来由于出现了这一场跨世纪的争论,才导致了多种描述,对于这个内容可以参考文献^{[13][14][15][16][17]}.在这里不用区分内力和外力,这是质点动力学问题,对于质点而言都是外力.现在力学教材中的功能原理是错误的,文献^[18]已经指明这个问题,这里不再说明.下面给出一个一般的证明——

根据动能定理,设质点仅仅受到保守力的作用,保守力的合力做的功为 W , $W = E_{k1} - E_{k0}$, E_{k1} 是 t_1 时刻的动能, E_{k0} 是 t_0 时刻的动能.根据势能的定义, $W = E_{p0} - E_{p1}$, E_{p1} 是 t_1 时刻的势能, E_{p0} 是 t_0 时刻的势能.所以 $E_{k1} - E_{k0} = E_{p0} - E_{p1}$, 所以 $E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0}$.

机械能守恒定律成立，满足伽利略变换，也具有单独的协变性。

牛顿定律满足伽利略变换是动能定理满足伽利略变换的充分条件，动能定理满足伽利略变换是机械能守恒定律满足伽利略变换的充分条件，即牛顿定律满足伽利略变换是机械能守恒定律满足伽利略变换的充分条件。^{[19][20]}由于动能定理是标量方程，与牛顿第二定律并不等价，因此我们得不出必要条件。说得更本质一些，由于机械能守恒定律只与质点所受到的力(合力)有关系，而力是伽利略变换的不变量，所以机械能守恒定律满足力学相对性原理。无论内势能还是外势能，都满足力学相对性原理，注意前后必须自洽，即两个惯性系必须利用同一种方法。

力学相对性原理仅仅涉及牛顿定律及其推论(动量定理与动量守恒定律、动能定理与功能原理(含机械能守恒定律)、角动量定理与角动量守恒定律、声波运动方程等)，是质点动力学规律，不涉及运动学规律、胡克定律等非牛顿定律的推论。相对性原理不是一个物理理论，而是对于物理理论的一个要求，是物理中的物理，满足相对性原理是一个理论成立的必要条件。能量守恒定律也是一个理论正确的必要条件，违反能量守恒定律的观点一定是错误的。

参考文献：

- 熊秉衡. 在不同惯性系中的机械能守恒定律, 物理(原名《物理通报》), 1964(6): 261~264.
- 熊秉衡. “在不同惯性系中的机械能守恒定律”一文的更正与补充, 物理(原名《物理通报》), 1965(3): 116~117.
- 蔡伯濂. 关于讲授功和能的几个问题, 工科物理教学, 1981(1), 7-13.
- 朱如曾. 弹簧振子相对于运动惯性系的机械能不守恒——关于‘对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷’的商榷, 物理通报, 2015(4): 100-103.
- 郑永令, 力学(2004年1月第2次印刷): 194页.
- 孟昭辉, 运用机械能守恒定律解题的参照系问题——对“一道中学生物理竞赛试题答案的商榷”一文的不同意见, 物理教师, 2015(2): 94.
- 史玉昌. 势能和机械能守恒定律. 大学物理, 1988(7): 16-17.
- 张景春, 韩淑梅. 浅析物体系的势能. 辽宁大学学报(自然科学版), 1989(4): 33-36.
- 郑金. 对一道物理竞赛题的两种互异解答的探讨. 物理通报, 2015(7): 109~112.
- 赵文桐, 刘文芳, 刘明成. 重力机械能守恒定律在各惯性系都成立, 物理通报, 2015(3): 96~98.
- 李学生, 师教民. 对一道中学生物理竞赛试题答案的商榷. 物理通报, 2014(9): 119~120.
- 刘明成, 赵文桐, 刘文芳. 引力机械能守恒定律在各惯性系都成立. 物理通报, 2015(6): 123~124.
- 费恩曼. 新千年版物理学讲义(第一卷), 148页.
- 朗道. 力学(第五版), 高等教育出版社, 13页.
- 费恩曼. 新千年版物理学讲义(第一卷), 149页.
- 漆安慎、杜婵英原著 包景东 修订. 力学(第三版2010), 高等教育出版社, 139页.
- 李力. 谈机械能守恒定律的正确表述. 物理通报, 2007(3): 21~22.
- 刘明成, 赵文桐, 刘文芳. 弹力机械能守恒定律在各惯性系都成立. 物理通报, 2016(1): 123~124.
- 张小溪. 也谈力学相对性原理与机械能. 怀化师专学报, 1994(4): 112~114.
- 胡世巧、张务华、张风云, 牛顿力学的数学系统和力学相对性原理. 河南师范大学学报(自然科学版), 36~39.

11/8/2015