惯性力与加速系的物理学

（一评广义相对论）

谭天荣

青岛大学物理系青岛 266071

内容提要：本文指出，非惯性系的物理学的数学工具是四维时空的曲线坐标运算而不是黎曼几何；在这一前提下，找到了惯性力的协变规律，从而在狭义相对论的框架内给出了惯性系的物理学方程在非惯性系的变形。正如惯性系中的物理学方程对洛伦兹变换保持不变一样，非惯性系中的物理学方程也对一种特殊的参照系变换保持不变。本文还指出，在这一工作完成之前，狭义相对论作为一个理论体系是不完整的。

[谭天荣. 惯性力与加速系的物理学. Academia Arena 2010;2(10):67-71]. (ISSN 1553-992X).

关键词：洛伦兹坐标系；曲线坐标；洛伦兹变换；加速系；惯性力；爱因斯坦

1. 引言

大家知道，牛顿第二定律不是仅仅对某一个参照系成立，而是对一系列称为“惯性系”的参照系都成立；另一方面，只要加上惯性力，牛顿第二定律对加速系（非惯性参照系）也成立。那么，这种加上了惯性力的牛顿第二定律仅对某一个加速系成立，还是对一系列加速系都成立呢？牛顿力学没有考虑过这个问题，狭义相对论也没有考虑这个问题，直到广义相对论问世，这个问题才以完全变样的形式提上日程。

那么，对于牛顿力学，对于狭义相对论，这个问题是否也有答案呢？本文将证明：这个问题有答案，而且它的答案将改变我们对加速系的物理学的认识。

2. 曲线坐标与加速系

如果让x^1、x^2和x^3表示三维空间的曲线坐标，则“矢径”$\mathbf{r}$表成x^1、x^2和x^3的函数：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3);$$

以弧长 s 为参变量，则任一曲线表成参变方程

$$x^1 = x^1(s),\quad x^2 = x^2(s),\quad x^3 = x^3(s);$$

把偏导符号$\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}$略写成$\nabla_\lambda$；则曲线坐标的基矢表成

$$\mathbf{e}_\lambda = \nabla_\lambda \mathbf{r};$$

从而矢径的微分表成

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dx^1 + \mathbf{e}_2 dx^2 + \mathbf{e}_3 dx^3 = \mathbf{e}_\mu dx^\mu。$$

引进曲线坐标的“共变度规张量”

$$g_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_\nu。$$

则有

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\mu dx^\mu\cdot\mathbf{e}_\nu dx^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu。$$

曲线坐标的“逆变度规张量”$g^{\lambda\mu}$由方程组$g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu} = \delta^\lambda{}_\nu$定义，对于常用的球面坐标和柱面坐标，这两种度规张量都具有对角线的形式。

对于给定的μ和ν，用$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$表示矢量$\nabla_\nu\mathbf{e}_\mu$的坐标，则有

$$\nabla_\mu\mathbf{e}_\nu = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\mathbf{e}_\lambda。$$

对$g_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$两边求偏导$\nabla_\lambda$，并考虑到$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\rho}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$，可得到

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\lambda\mu}。\tag{1}$$

根据基矢的定义，有

$$\nabla_\mu \mathbf{e}_\nu = \nabla_\nu \mathbf{e}_\mu。$$

从而

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}。\tag{2}$$

(1)式与(2)式给出

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\nabla_\mu g_{\nu\rho} + \nabla_\nu g_{\rho\mu} - \nabla_\rho g_{\mu\nu})。\tag{3}$$

该式把符号$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$表成度规张量的偏导。

曲线的切线方向矢量是

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}_\mu \frac{dx^\mu}{ds}。$$

对于直线，切线的方向矢量保持不变：$\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{ds} = 0$，从而有

$$0 = \frac{d\boldsymbol{\kappa}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{e}_\mu \frac{dx^\mu}{ds}) = \mathbf{e}_\lambda(\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds})。$$

于是在给定的曲线坐标中，一条直线满足微分方程

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0。\tag{4}$$

如果把上面诸方程中的张量或符号中的指标加上一个时间坐标 x^0，再用固有时τ的微分代替弧长的微分s，则得到四维时空的曲线坐标的一组对应的公式。这组公式在形式上与三维空间的曲线坐标的公式完全一样，但表现着全新的内容。

例如，(4)式原是一条直线在三维空间曲线坐标下的微分方程，对于四维时空，它被改写为

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,\tag{5}$$

表示加速系中的一个质点的“等速直线运动”。

另一方面，四维时空的曲线坐标运算的某些公式与黎曼几何的公式颇有一些相似，例如，(5)式在黎曼几何中是“短程线方程”。但两者物理意义却迥然不同，不能彼此过渡。

3. 相对论中的惯性力

对于牛顿力学，“参照系”仅仅指刚性标架，而“加速系”则是指作加速运动的刚性标架。

对于相对论，“参照系”的概念比牛顿力学的更丰富多彩：一个四维时空的曲线坐标系就表示一个“参照系”。四维时空的曲线坐标系可以分成两类，一类是洛伦兹坐标系（惯性系，再加上对三维空间取笛卡尔坐标系）；另一类是非洛伦兹坐标系（加速系，或者对三维空间取曲线坐标系；一般地说是两者兼而有之）。下面，按照习惯，如果不特别声明，我们把“惯性系”等同于“洛伦兹坐标系”，而“加速系”则等同于“非洛伦兹坐标系”。

在相对论中，除了作加速运动的刚性标架以外，还有其它形形色色的“加速系”。例如，在童话电影《格列佛游记》里，当主人翁进入大人国时，其身材变小，反之，当他进入小人国时，其身材变大，这种坐标尺度的放大与缩小的过程，也给出一种加速系。

对于惯性系，表示相对论形式的牛顿第二定律的方程是

$$m_0\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = F^\lambda,$$

其中F^λ的指标λ遍历 0、1、2、3。F^1、F^2和F^3是经过改写的“力”，F^0是经过改写的“功率”。m_0是质点的静止质量，τ是固有时，x^0是时间坐标而x^1、x^2和x^3是三维空间的笛卡尔坐标。以后我们说的牛顿第二定律就是指这个方程。

如果把(5)式理解为加速系中的一个质点的“等速直线运动”方程，将该式两边乘以质点的静止质量m_0并移项，得到

$$m_0\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = -m_0\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}。$$

令

$$K^{\lambda} \equiv -m_0\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}, \tag{6}$$

则有

$$m_0\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2} = K^{\lambda}。$$

这个方程在形式上与相对论形式的牛顿第二定律完全一样，其中 K^1、K^2和 K^3是经过改写的“惯性力”，K^0是经过改写的“惯性功率”。

现在我们问：“惯性力是不是矢量？”

或许有人说，惯性力有大小有方向，当然是矢量！这个回答没错，但答非所问。

相对论的基本数学工具是张量分析，而张量分析立足于“参照系变换”。对于相对论，一个四维时空的曲线坐标的变换表示一个“参照系变换”，全体参照系变换组成一个“群”，记作“H 群”；通常说的“参照系变换群”是指“H 群”的一个“子群”。从一个惯性系变换到另一个惯性系的参照系变换称为“洛伦兹变换”，全体洛伦兹变换组成“洛伦兹变换群”，它也是“H 群”的一个子群。

大家知道，相对论意义下的力

$$\mathbf{F} = F^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda}$$

对洛伦兹变换保持不变，从而其坐标 F^{λ}对于洛伦兹变换是协变的，在这种意义下，它是一个四维矢量。

同样，对于惯性力，我们可以给出如下定义：当一个加速系变换到另一个加速系时，四维时空的基矢 $\mathbf{e}_{\lambda}$和(6)式给出的惯性力的坐标 K^{λ}都会相应地改变。如果对于每一个相对论意义下的惯性力

$$\mathbf{K} = K^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda},$$

存在一组参照系变换，对于其中的每一个变换，惯性力 **K** 保持不变，从而惯性力的坐标 K^{λ}是“协变”的，则惯性力就是矢量。

更一般地说，设 G 是一个“参照系变换群”，而某一符号对于变换群 G 中的每一个变换都具有协变性，则称该符号表示的对象为变换群 G 的“不变量”。按照这一规定，相对论意义下的力 **F** 是“洛伦兹变换群”的不变量，正是在这种意义下它是一个矢量。同样，如果对于每一个惯性力，总能找到一个以它为不变量的参照系变换群，则惯性力就是矢量。

4. 惯性力是矢量

那么，惯性力到底是不是矢量呢？回答是肯定的。

首先举一个牛顿力学的例子，表明一个给定的惯性力对于某一组参照系变换保持不变。

考虑一个爱因斯坦的“升降机”，它相对地面自由下落。下面，我们把地面看作惯性系，从而该升降机是一个加速系，记作α，其中的一位乘客a感受到一个惯性力，记作K_{α}。另一方面，设乘客a的质量m，重力加速度为g，取铅直向上的方向为正，则a所受的重力为–mg。在升降机自由下落时，a所受的惯性力与重力相互抵消，从而有$K_{\alpha} = mg$。再考虑一座相对地面作等速直线运动的大楼（据说，这是可以实现的），大楼里也有一个自由下落的升降机β，它也一个加速系。如果乘客a进入升降机β，他也会感受到一个惯性力K_{β}。根据牛顿力学，同样有$K_{\beta} = mg$。于是，$K_{\beta} = K_{\alpha}$。

用ξ表示“地面”，η表示“大楼”，则ξ和η是两个惯性系。再用R表示从地面到升降机α的参照系变换，则 $\alpha = R\xi$。R同时也把“大楼”变换到升降机β，从而 $\beta = R\eta$。上面的结论“乘客a在这两个升降机中所感受的惯性力相同”，即“$K_{\beta} = K_{\alpha}$”，可以推广成为如下命题：

A. 如果ξ和η是两个惯性系，而 R 是一个把惯性系变换到加速系的参照系变换，则在从加速系 Rξ到加速系 Rη参照系变换中，惯性力保持不变。

在命题A中，用S表示把惯性系ξ变换到惯性系η的伽利略变换：$\eta = S\xi$；再引进$\alpha = R\xi$，$\beta = R\eta$，并用R’表示R的逆变换，从而把$\alpha = R\xi$表成$\xi = R'\alpha$，则有

$$\beta = R\eta = RS\xi = RSR'\alpha。$$

在这里，RSR’是一个由 R’、S 和 R 三个参照系变换给出的“合成参照系变换”，它把加速系α变换到加速系β。经过这一参照系变换，惯性力保持不变。这样，命题 A 进一步表成

B. 如果 R 是一个参照系变换，它把某一惯性系变换到加速系α，而 S 是一从惯性系到惯性系的参照系变换，则加速系α的惯性力对于合成参照系变换 RSR’保持不变（其中 R’表示 R 的逆变换）。

现在，我们回到相对论。在这里，命题 B 表成：

C. 设 R 是把某一惯性系变换到某一加速系α的非洛伦兹变换（是参照系变换，但不是洛伦兹变换）；而 S 是一洛伦兹变换，则加速系α的惯性力对于参照系变换 RSR'保持不变。

设ξ和η是两个惯性系，从惯性系ξ到惯性系η的洛伦兹变换记作 S。再考虑某一非洛伦兹变换 R（属于 H 群，但不属于洛伦兹变换群），它把ξ变换到加速系α；把η变换到加速系β，则从加速系α到加速系β的参照系变换是 RSR'，我们称它为“准洛伦兹变换”。固定 R，当 S 遍历整个洛仑兹变换群时，形如 RSR'的参照系变换形成一个参照系变换群，我们称它为“准洛伦兹变换群”，或更确切地称它为“由 R 生成的准洛伦兹变换群”。

设ξ和η是两个惯性系而ζ是一个加速系，则从ξ到ζ和从η到ζ是不同的非洛伦兹变换，但它们生成同一个准洛伦兹变换群 G_ζ。因此，一个加速系ζ对应唯一的准洛伦兹变换群 G_ζ。一个惯性力对应一个确定的加速系，因此一个惯性力也对应唯一的准洛伦兹变换群。

根据命题 C，加速系ζ所对应的惯性力 $\mathbf{K}_\zeta$是加速系ζ所对应的准洛伦兹变换群 G_ζ的不变量。正是在这种意义下，（相对论意义下的）惯性力是矢量。

如果一个物理量在洛伦兹变换下保持不变，则我们说其坐标具有“洛伦兹协变性”；同样，因为惯性力在自己对应的准洛伦兹变换下保持不变，在这种意义下，我们说惯性力的坐标具有“准洛伦兹协变性”。

我们所考察的加速系ζ对应的惯性力的表达式是(6)式，其中的一个因子 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 表现一个力场的特征，我们称该力场为“惯性力场”。因此，加速系ζ还对应一个惯性力场，它也是变换群G_ζ的不变量，从而也是一个张量，我们称它为“惯性力场（强度）张量”。还有，加速系ζ的“度规张量”之所以是张量，也是因为它是变换群G_ζ的不变量。

回到(3)式，它表示一个加速系的惯性力场张量$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$与该加速系的度规 $g_{\mu\nu}$之间的关系。

这一切都与黎曼几何无关。

5. 加速系的物理学方程

相对论刚刚建成，就提出了一个问题：“对于加速系，相对论形式下的物理学方程表成什么形式？”所谓“时钟佯谬”的提出更显示这个问题的解决已经迫不及待。不幸的是，在过去的一个世纪里，由于种种原因，这一问题的解决被耽误了，以致今天我不得不把它当作新问题提出来。在这里，我先考察一个例子。

当一个带电 e 静止质量为 m_0 的点电荷置于电磁场 $F^{\lambda\mu}$中时，相对论形式的牛顿第二定律表成

$$m_0\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = eF^{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}。 \quad (7)$$

在(7)式中，所有的物理量都是洛伦兹变换群的不变量，从而(7)式是一个张量方程。

设有加速系ζ，其对应的准洛伦兹变换群是 G_ζ，其惯性力场是$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$。在参照系ζ中，(7)式转化为方程

$$m_0\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = eF^{\lambda\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} - m_0\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}。 \quad (8)$$

在(8)式中，不仅$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$是变换群 G_ζ的不变量，而且其他物理量（例如 $F^{\lambda\mu}$）也都是变换群 G_ζ的不变量，从而(8)式作为变换群 G_ζ的诸不变量之间的关系，仍然是一个张量方程。但它与(7)式相比有了两点改变：第一，增添了一项惯性力；第二，张量的协变性改变了，从“洛伦兹协变性”变成了“准洛伦兹协变性”。

大家知道，面对同一个问题，爱因斯坦给出了一个迥然不同的答案：关键的区别是，他用“广义协变性”取代“准洛伦兹协变性”来表现加速系的物理学方程的协变性。这两种协变性有如下区别：

第一，广义协变性是洛伦兹协变性的推广，而准洛伦兹协变性则是洛伦兹协变性的变形。如果非洛伦兹变换 R 无限接近恒等变换，则在洛伦兹变换 RSR'无限接近于洛伦兹变换 S，因此从洛伦兹协变性可连续地过渡到准洛伦兹协变性，而从洛伦兹协变性过渡到广义协变性则没有这种连续性。

第二，(3)式给出的符号 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ 表示加速系物理学中的一个最关键的物理量。作为四维时空的曲线坐标系的一个范畴，它是“惯性力场张量”，具有准洛伦兹协变性。而同一符号在黎曼几何中称为“联络”，它也是一个举足轻重的范畴，却并不是一个张量，不具有广义协变性。

第三，“准洛伦兹协变性”的概念可以离开引力场的概念单独定义，而广义协变性却与引力场不可分离。

为什么爱因斯坦没有找到“准洛伦兹协变性”呢？这与其说是一个“智力”问题倒不如说是一个“爱好”问题。爱因斯坦偏爱“新颖观念”，由于这种偏爱他建立了光子论；由于这种偏爱他试图建立“统一场论”；还是由于这种偏爱，在处理加速系的物理学问题时，他采用了严谨而又美丽的“黎曼几何”，从而引进了“弯曲时空”这一匪夷所思的观念。

从“洛伦兹协变性”到“准洛伦兹协变性”是一条凡人的思路，一条保守的、传统的、循规蹈矩的思路；

而从“洛伦兹协变性”到“广义协变性”则是一条天才的思路，一条打破常规、出奇制胜、独辟蹊径的思路。如果“以成败论英雄”，则爱因斯坦这条思路找对了。从 1919 年起爱因斯坦成了全世界家喻户晓的名人，有史以来，还没有第二位物理学家享受这样的殊荣。然而又有谁知道，物理学为此付出了怎样的代价！

6. 结束语

按照爱因斯坦的意见，狭义相对论只给出惯性系的物理学方程，一旦涉及加速系时就必须应用广义相对论，从而必须应用“等效原理”与“广义协变性原理”。从数理科学的一般观点来看，像这样理解的狭义相对论是不完整的。

大家知道：一个参照系只要对惯性系稍有偏离，就成了加速系。这一事实表明：惯性系与加速系之间的关系，类似于数轴上的一个点与它的“邻域”之间的关系。在数学中，为了表现一个函数在某一点的行为，孤立地给出该函数在这个点的取值是不够的，只有同时给出该函数在这一点的“邻域”的取值，对这个函数在该点的行为的描写才是完整的。同样，一个物理学理论仅仅孤立地给出惯性系的运动方程也是不够的，还需要同时给出加速系的运动方程。反过来说：狭义相对论作为一个完整的理论体系，应该不仅给出能惯性系的物理学方程，还能同时给出这种方程在加速系的变形，而不用借助于该理论以外的“原理”。

因此，在完成了本文的工作之前，狭义相对论还不是一个完整的理论体系。

Inertial force and Non-inertial System Physics

TAN Tianrong
(Department of Physics, Qingdao University, Shandong 266071, P. R. China.)

Abstract: It is pointed that the mathematical means of non-inertial system is the curve coordinate of four-dimensional time-space instead of Riemannian geometry. Starting from this premise, the co-variant law of inertia force is found; as a result, the variance form of physical equations for non-inertial system is given. Just as physical equations for inertial system remain covariant for Lorentz transformations, those for non-inertial system remain covariant for a kind of new reference transformations. Before this work being to success, special relativity as a theory system is incomplete.

[TAN Tianrong. Inertial force and Non-inertial System Physics. Academia Arena 2010;2(10):67-71]. (ISSN 1553-992X).

Keywords: curve coordinates; non-inertia reference system; Lorentz transformation; inertia force; Lorentz coordinates; Einstein