

惯性力与加速系的物理学

(一评广义相对论)

谭天荣

青岛大学物理系青岛 266071

ttr359@126.com

内容提要：本文指出：对于相对论，适用于加速系物理学的数学工具不是黎曼几何，而是平直的四维时空的曲线坐标运算。在这一前提下，证明了加上了惯性力的牛顿第二定律对一系列特殊的加速系成立，从而在狭义相对论的框架内给出了加速系的物理学方程的不变性，正如惯性系的物理学方程具有“洛伦兹不变性”一样，加速系的物理学方程具有一种“准洛伦兹不变性”。最后，本文指出在这一工作完成之前，狭义相对论作为一个理论体系是不完整的。

[谭天荣. 惯性力与加速系的物理学. Academia Arena 2010;2(11):34-40]. (ISSN 1553-992X). (<http://www.sciencepub.net>).

关键词：曲线坐标；加速系的物理学；准洛伦兹变换；惯性力场张量；惯性场论；爱因斯坦

1. 引言

相对论刚刚建成，就提出了一个问题：“对于加速系（非惯性参照系），相对论的物理学方程表成什么形式？”时至今日，一个世纪已经过去。但在我们看来，这一问题尚未解决。在这里，我们将从两个略微不同的角度，重新探讨这一问题。

第一，大家知道，牛顿第二定律不是仅仅对某一个参照系成立，而是对一系列称为“惯性系”的参照系都成立；另一方面，只要加上惯性力，牛顿第二定律对加速系也成立。那么，这种加上了惯性力的牛顿第二定律仅对某一个加速系成立，还是对一系列加速系都成立呢？

第二，既然牛顿第二定律可以改写成在洛伦兹变换下保持不变的张量方程，加上了惯性力的牛顿第二定律能不能也改写成在某种参照系变换下保持不变的张量方程呢？

第一个问题属于牛顿力学的范畴，而第二个问题则属于相对论的范畴，但在牛顿力学和狭义相对论的框架之内，这两个问题似乎都没有人考虑过，直到广义相对论问世，它们才以完全变样的形式提上日程。

在本文中，我们将在狭义相对论的框架里回答这两个问题。

2. 曲线坐标与加速系

如果让 x^1 、 x^2 和 x^3 表示普通的三维空间的曲线坐标，则“矢径” $\mathbf{r}$ 表成 x^1 、 x^2 和 x^3 的函数：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)。$$

把偏导符号 $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ 略写成 ∇_λ ，则曲线坐标的基矢表成

$$\mathbf{e}_\lambda = \nabla_\lambda \mathbf{r},$$

从而矢径的微分表成

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dx^1 + \mathbf{e}_2 dx^2 + \mathbf{e}_3 dx^3 = \mathbf{e}_\mu dx^\mu.$$

对于给定的 μ 和 ν , 用 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 表示矢量 $\nabla_\nu \mathbf{e}_\mu$ 的坐标, 则有

$$\nabla_\mu \mathbf{e}_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \mathbf{e}_\lambda. \quad (1)$$

引进曲线坐标的“共变度规张量”

$$g_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu,$$

再两边求偏导 ∇_λ , 考虑到 $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho$, 则上式给出

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\lambda\mu}. \quad (2)$$

根据基矢的定义, 有

$$\nabla_\mu \mathbf{e}_\nu = \nabla_\nu \mathbf{e}_\mu.$$

从而

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\nu\mu}.$$

上式与(2)式给出

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu g_{\nu\lambda} + \nabla_\nu g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda g_{\mu\nu}).$$

曲线坐标的“逆变度规张量” $g^{\lambda\mu}$ 由方程组 $g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu$ 定义。应用逆变度规张量, 上式可表成

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_\mu g_{\nu\rho} + \nabla_\nu g_{\rho\mu} - \nabla_\rho g_{\mu\nu}). \quad (3)$$

该式把符号 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 表成度规张量的偏导。

以弧长 s 为参变量, 则三维空间的任一曲线可表成参变方程

$$x^1 = x^1(s), \quad x^2 = x^2(s), \quad x^3 = x^3(s),$$

根据定义

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\mu dx^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

另一方面, 曲线的切线方向矢量是

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}_\mu \frac{dx^\mu}{ds}.$$

对于直线, 切线的方向矢量保持不变: $\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{ds} = 0$, 考虑到

$$\frac{d\mathbf{e}_\nu}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds} \nabla_\mu \mathbf{e}_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \mathbf{e}_\lambda.$$

我们有

$$0 = \frac{d\boldsymbol{\kappa}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\mathbf{e}_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \right) = \mathbf{e}_\lambda \left(\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right).$$

于是在给定的曲线坐标中, 一条直线满足微分方程

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (4)$$

如果把上面诸方程中的张量或符号中加上一个时间坐标 x^0 , 再用固有时 τ 的微分代替弧长的微分 s , 则得到(平直的)四维时空的曲线坐标的一组对应的公式。这组公式在形式上与三维空间的曲线坐标的公式完全一样, 但表现着全新的内容。

例如, (4)式原是直线在三维空间曲线坐标下的微分方程, 在四维时空, 它被改写为

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (5)$$

表示加速系中的一个质点的“等速直线运动”。

同样，我们还可以给出四维时空的曲线坐标运算的其他公式，这些公式与黎曼几何的公式颇有一些相似，例如，(5)式在黎曼几何中是“短程线方程”。但两者物理意义却迥然不同，不能彼此过渡。

3. 惯性力是不是矢量？

对于牛顿力学，“参照系”仅仅指刚性标架，而“加速系”则是指作“加速运动”（加速平动或旋转）的刚性标架。

在相对论中，“参照系”的概念比牛顿力学的更丰富多彩：任一（平直的）四维时空的曲线坐标系就表示一个“参照系”。四维时空的曲线坐标系可以分成两类，一类是洛伦兹坐标系（惯性系，再加上对三维空间取笛卡尔坐标系）；另一类是非洛伦兹坐标系。下面，按照习惯，如果不特别声明，我们把“惯性系”等同于“洛伦兹坐标系”，而“加速系”则等同于“非洛伦兹坐标系”。

把(5)式理解为加速系中的一个质点的“等速直线运动”方程，将该式两边乘以质点的静止质量 m_0 并移项，得到

$$m_0 \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = -m_0 \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}。$$

令

$$K^\lambda \equiv -m_0 \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (6)$$

则有

$$m_0 \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = K^\lambda。$$

这个方程在形式上与相对论形式的牛顿第二定律完全一样，其中 K^1 、 K^2 和 K^3 是经过改写的“惯性力”， K^0 是经过改写的“惯性功率”。

对于惯性系，当一个静止质量为 m_0 带电 e 的点电荷置于电磁场 $F^{\lambda\mu}$ 中时，相对论形式的牛顿第二定律表成

$$m_0 \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = e F^{\lambda\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}。 \quad (7)$$

另一方面，在狭义相对论的框架中，对于一个给定的加速系，(7)式转化为方程

$$m_0 \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = e F^{\lambda\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} - m_0 \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}。 \quad (8)$$

在(7)式中，所有的物理量都是张量，从而(7)式是一个张量方程。那么，(8)式是不是也是一个张量方程呢？如果是，则其中的惯性力必须是矢量，那么惯性力是不是矢量呢？

或许有人说，惯性力有大小有方向，当然是矢量！这个回答没错，但答非所问。

在(7)式中，当参照系从一个惯性系变换到另一个惯性系时，四维时空的基矢 $\mathbf{e}_\lambda$ 和洛伦兹力的坐标 $L^\lambda = e F^{\lambda\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$ 都会相应地改变，但洛伦兹力 $L^\lambda \mathbf{e}_\lambda$ 本身却保持不变，在这种意义下，洛伦兹力的坐标 L^λ 在洛伦兹变换下是“协变”的；也是在这种意义下，洛伦兹力是一个矢量（四维时空的四维矢量）。

同样，当一个加速系变换到另一个加速系时，四维时空的基矢 $\mathbf{e}_\lambda$ 和(6)式给出的惯性力的坐标 K^λ 都会相应地改变。如果对于每一个（相对论意义下的）惯性力，存在一组参照系变换，对于其中的每一个变换，表达式 $K^\lambda \mathbf{e}_\lambda$ 保持不变，从而惯性力的坐标 K^λ 对于该变换是“协变”的，则惯性力就是矢量。

相对论的基本数学工具是张量分析，从而立足于“参照系变换”。对于相对论，一个四维时空的曲线坐标的变换表示一个“参照系变换”，全体参照系变换组成一个“群”；通常说的“参照系变换群”是该群的一个“子群”。从一个惯性系变换到另一个惯性系的参照系变换称为“洛伦兹变换”，全体洛伦兹变换组成“洛伦兹变换群”，它也是一个“参照系变换群”。

设 G 是一个“参照系变换群”，而某一符号对于变换群 G 中的每一个变换都具有协变性，则称该符号表示的对象为变换群 G 的“不变量”。按照这一规定，洛伦兹力是“洛伦兹变换群”的不变量，正是在这种意义下它是一个矢量。同样，如果对于每一个惯性力，总能找到一个以它为不变量的参照系变换群，则惯性力就是矢量。

4. 惯性力场张量

那么，惯性力到底是不是矢量呢？为了回答这一问题，首先给出一个定理：

A. 设 S 与 R 是两个参照系变换， S 把惯性系 ξ 变换到惯性系 η ， R 把惯性系 ξ 和 η 分别变换到加速系 α 和 β ，则从加速系 α 到加速系 β 的参照系变换是 RSR^{-1} (R^{-1} 是 R 的逆变换)。

证明如下：根据定义，有 $\eta = S\xi$ ； $\alpha = R\xi$ ， $\beta = R\eta$ ； $\xi = R^{-1}\alpha$ 。于是

$$\beta = R\eta = RS\xi = RSR^{-1}\alpha。$$

大家知道：在相对论中，惯性系的基本物理学方程在“洛伦兹变换”下保持不变。下面，我们将通过一个牛顿力学中的例子看到：一个加速系也有某种物理量在某种参照系变换下保持不变。

把地面看作惯性系，则一个相对地面自由下落的“升降机”，记作 α ，是一个作“等加速直线运动”的加速系。设其中的一位质量为 m 的乘客感受到惯性力 K ，则 $a = K/m$ 描述参照系 α 的特征，我们称它“惯性加速度”。再考虑一座相对地面作等速直线运动的大楼（据说，这是可以实现的），大楼里也有一个自由下落的“升降机” β ，则根据牛顿力学可得出结论：第一， β 的惯性加速度也是 a ，从而加速系 α 与 β 具有同一惯性加速度；第二，从地面到升降机 α 的参照系变换也是从大楼到升降机 β 的参照系变换。应用命题 A，上面的结论可推广为如下命题：

B. 设 R 是一个参照系变换，它把某一惯性系变换到作“等加速直线运动”的参照系 α ；而 S 是一个从惯性系到惯性系的参照系变换，则加速系 α 的“惯性加速度”对于参照系变换 RSR^{-1} 保持不变。

在相对论中，惯性力的表达式是 (6) 式，其有一个因子 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 表现参照系的特征，描写某种力场，我们称它为“惯性力场”。命题 B 中的“惯性加速度”是一种特殊的惯性力场，因此，命题 B 在相对论中可推广为：

C. 设参照系变换 R 把某一惯性系变换到加速系 α ；而 S 是一个洛伦兹变换，则加速系 α 的惯性力场对于参照系变换 RSR^{-1} 保持不变。

下面，我们把形如 RSR^{-1} 的参照系变换称为“准洛伦兹变换”。固定 R ，当 S 遍历整个洛伦兹变换群时， RSR^{-1} 形成一个参照系变换群，我们称它为“准洛伦兹变换群”，或更确切地称它为“由 R 生成的准洛伦兹变换群”。

设 ξ 和 η 是两个惯性系而 ζ 是一个加速系，则从 ξ 到 ζ 和从 η 到 ζ 是不同的参照系变换，但它们生成同一个准洛伦兹变换群 G_{ζ} 。因此，一个加速系 ζ 对应唯一的准洛伦兹变换群 G_{ζ} 。

命题 C 表明，一个加速系的惯性力场是该加速系所对应的准洛伦兹变换群的一个不变量，从而是一个张量，我们称它“惯性力场张量”。这是一种新型张量。

(6) 式表示的惯性力也是其对应的准洛伦兹变换群的不变量。正是在这种意义下，（相对论意义下的）惯

性力是矢量。

5. 加速系物理学的基本假设

上面我们经过两次推广，从一个个别的例子得出命题 C。但是，我们凭什么再三地作这种“从特殊到一般”的推理呢？

在这里，我们是在建立而不是应用物理学的定律。在这种过程中，“从特殊到一般”的推理是逻辑推理的基本形式。这种从已知进入未知的过程，要求有一定已知事实作为启发性的依据。那么，在上面的两次推广中，作为启发性依据的已知事实是什么呢？

我们知道，一个惯性系的各种物理量都是对同一组参照系变换保持不变的。对于一个加速系，我们也很难想象它的某些物理量对一组参照系变换保持不变而另一些物理量却对另一组参照系变换保持不变，因而我们可以很自然地联想：只要某一加速系有一个物理量对某一组参照系变换保持不变，则该加速系的其他物理量也都对这组参照系变换保持不变。这种联想不仅支持我们上面的“从特殊到一般”的推理，而且还支持我们进一步得出更深远的结论。

惯性系的物理量在洛伦兹变换下保持不变，在这种意义下，我们说它具有“洛伦兹不变性”，而它的坐标具有“洛伦兹协变性”；同样，如果一个物理量在准洛伦兹变换下保持不变，则我们说它具有“准洛伦兹不变性”，而它的坐标具有“准洛伦兹协变性”。

这样，我们进一步把命题 C 追溯到如下基本假设：

D. 一个加速系的任意物理学方程对于该加速系所对应的准洛伦兹变换群保持不变，而该方程的物理量的坐标具有对应的准洛伦兹协变性。

下面，根据习惯，除了特殊情形，我们不再区分一个张量和它的坐标表达式，从而忽略“不变性”与“协变性”之间的区别。

根据命题 D，惯性力场 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 是它对应的准洛伦兹变换群 G_c 的不变量，从而它才是一个张量。还有，加速系 ζ 的“度规张量” $g_{\mu\nu}$ 之所以是张量，也是因为它变换群 G_c 的不变量。(3) 式表示一个加速系的惯性力场张量与该加速系的度规张量之间的关系。

根据命题 D，在 (8) 式中，不仅惯性力场 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 是变换群 G_c 的不变量，而且其他物理量（其中包括电磁场 $F^{\mu\nu}$ ）也都是变换群 G_c 的不变量，从而 (8) 式作为变换群 G_c 的诸不变量之间的关系，仍然是一个张量方程。但它与 (7) 式相比有了两点改变：第一，增添了一项惯性力；第二，诸张量的协变性改变了，从“洛伦兹协变性”变成了“准洛伦兹协变性”。

下面，我们把立足于命题 D 的加速系物理学称为“惯性场论”，它是狭义相对论的一个新的组成部分。

按照爱因斯坦的意见，狭义相对论只给出惯性系的物理学方程，一旦涉及加速系时就必须应用广义相对论，从而必须应用“等效原理”与“广义协变性原理”。从数理科学的一般观点来看，像这样理解的狭义相对论是不完整的。

大家知道：一个参照系只要对惯性系稍有偏离，就成了加速系。这一事实表明：惯性系与加速系之间的关系，类似于数轴上的一个点与它的“邻域”之间的关系。在数学中，为了表现一个函数在某一点的行为，孤立地给出该函数在这个点的取值是不够的，只有同时给出该函数在这一点的“邻域”的取值，对这个函数在该点的行为的描写才是完整的。同样，一个物理学理论仅仅孤立地给出惯性系的运动方程也是不够的，还需要同时给出加速系的运动方程。反过来说：狭义相对论作为一个完整的理论体系，应该不仅给出能惯性系

的物理学方程，还能同时给出这种方程在加速系的变形，而不用借助于该理论以外的“原理”。

因此，在建立惯性场论之前，狭义相对论还不是一个完整的理论体系。

6. 关于“广义协变性”

上面，为弄清相对论的物理学方程在加速系的表现形式，我们建立了惯性场论。面对同一课题，爱因斯坦走上了另一条道路：借助于严谨而又美丽的“黎曼几何”，引进了“弯曲时空”这一匪夷所思的观念，建立了广义相对论的雄伟大厦。广义相对论与惯性场论之间的关键的区别是，它用“广义协变性”取代“准洛伦兹协变性”来表现加速系的物理学方程的协变性。

按照爱因斯坦的意见，惯性力与万有引力不可分辨，因此广义相对论包括他的引力场论。在我们看来，惯性力与万有引力是不同的力，上面的惯性场论就不涉及万有引力。但只有在考察引力场论的时候，我们才能全面地评论广义相对论。在这里，我们只能提出两点感性上的异议。

第一，(5)式中的符号 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 作为惯性场论的一个范畴，是“惯性力场张量”，它是加速系物理学中的一个最关键的物理量，这个物理量具有准洛伦兹协变性。而同一符号在黎曼几何中称为“联络”，它也是一个举足轻重的范畴，却并不是一个张量，不具有广义协变性。

谁也不能为这一事实而非难爱因斯坦，但广义相对论的这一特点似乎有悖于狄拉克关于物理学理论的“美”的原则。

第二，如果非洛伦兹变换 R 无限接近恒等变换，则准洛伦兹变换 RSR^{-1} 无限接近于洛伦兹变换 S ，因此从洛伦兹协变性可连续地过渡到准洛伦兹协变性，而从洛伦兹协变性过渡到广义协变性，则是一次突变，既是一次数学运算上的突变，也是一次物理概念上的突变。

广义相对论的这一特点在逻辑上没有毛病，但也使人感到别扭。比方说，在某种近似下，两个相互作用等速直线运动的参照系可以看作是两个惯性系，它们之间的变换可以看作是“洛伦兹变换”。如果由于精确度提高，这两个参照系被看作加速系，则它们之间的变换被看成“准洛伦兹变换”。当精确度的提高很小时，新的准洛伦兹变换与原来的洛伦兹变换的差别也很小。很难理解这点小小的差别会引起什么突变，无论是数学运算方面还是物理概念方面的突变。

为什么爱因斯坦没有找到准洛伦兹协变性呢？这与其说是一个“智力”问题倒不如说是一个“爱好”问题。爱因斯坦偏爱“新颖观念”，由于这种偏爱他建立了光子论；由于这种偏爱他试图建立“统一场论”；还是由于这种偏爱，爱因斯坦选择了“广义协变性”。

从“洛伦兹协变性”到“准洛伦兹协变性”是一条凡人的思路，一条保守的、传统的、循规蹈矩的思路；而从“洛伦兹协变性”到“广义协变性”则是一条天才的思路，一条打破常规、出奇制胜、独辟蹊径的思路。我们得到准洛伦兹协变性是在一些已知事实的启发下，经过从特殊到一般的逻辑推理逐步导出的，而爱因斯坦得到广义协变性则是一次灵感的闪耀，人们无法追溯其来龙去脉。

如果“以成败论英雄”，则爱因斯坦这条思路找对了。由于当年广义相对论的成功，从 1919 年起爱因斯坦成了全世界家喻户晓的名人，至今不仅仍被公认为是当代最伟大的物理学家，还被公认为是当代物理学领域里的屈指可数的哲人与思想家。有史以来，还没有第二位物理学家享受这样的殊荣。

然而又有谁知道，物理学为此付出了怎样的代价！

7. 结束语

现在我们可以回答本文开始时提出的问题：第一，加上了惯性力的牛顿第二定律不是仅对一个加速系成

立，而是对一系列加速系成立，这一系列加速系之间的变换组成“准洛伦兹变换群”。第二，在相对论中，加上了惯性力的牛顿第二定律改写成在准洛伦兹变换下保持不变的张量方程，这种形式的张量方程具有准洛伦兹协变性，是惯性场论的基本方程之一。

Inertial force and Non-inertial System Physics

TAN Tianrong

(Department of Physics, Qingdao University, Shandong 266071, P. R. China.)

Abstract: It is pointed out that for relativity, the mathematical means of non-inertial system is the operations of the curve coordinate in the (smooth) four-dimensional time-space instead of Riemannian geometry. Starting from this premise, it is found that Newton second law with inertia force hold true for a set of special non-inertial reference systems, and thereby the invariability of physical equations in non-inertial reference systems is obtained: just as the physical equations in inertial reference possess “Lorentz invariability”, as well as those of non-inertial reference possess a certain “quasi-Lorentz invariability”. Finally, it is concluded that before this work being to success, special relativity as a theory system is incomplete.

[谭天荣. 惯性力与加速系的物理学. Academia Arena 2010;2(11):34-40]. (ISSN 1553-992X). (<http://www.sciencepub.net>).

Keywords: curve coordinates; non-inertia physics; quasi-Lorentz transformation; inertial field tensor; inertia field theory; Einstein

9/18/2010