

36. 角动量守恒定律满足力学相对性原理

李学生 (Li Xuesheng)

山东大学副教授, 理论物理教师, 中国管理科学院学术委员会特约研究员, 北京相对论研究联谊会会员, 中国民主同盟盟员 (作者为中国科学院高能物理所研究员)

xiandaiwulixue@21cn.com, 1922538071@qq.com

摘要: 首先分析了经典的角动量守恒定律不具有伽利略变换的不变性, 最后重新表述了角动量守恒定律, 使其满足力学相对性原理。

[李学生 (Li Xuesheng). 李学生 (Li Xuesheng). 36. 角动量守恒定律满足力学相对性原理 *Academ Arena* 2017;9(15s): 151-153]. (ISSN 1553-992X). <http://www.sciencepub.net/academia>. 36. doi:[10.7537/marsaaj0915s1736](https://doi.org/10.7537/marsaaj0915s1736).

关键词: 矢量法; 角动量守恒定律; 角动量定理; 力学相对性原理

一、经典的角动量守恒定律不满足伽利略变换

角动量守恒定律是物理学的普遍定律之一, 是反映质点和质点系围绕一点或一轴运动的普遍规律. 尽管角动量守恒定律可以从牛顿定律中推导出来, 但是它不受牛顿定律适用范围的限制, 不论是研究物体的低速运动还是高速运动, 不论是宏观领域的物理现象还是微观领域的物理过程, 角动量守恒定律已被大量实验证明是正确的, 无一相悖. 角动量守恒定律是自然界普遍存在的基本定律之一, 角动量守恒的实质上对应着空间旋转不变性(体系整体绕任意轴 n 旋转 $\delta\varphi$ 时, 体系的哈密顿算符不变). 当体系处于中心对称场或无外场时, 体系具有空间旋转不变性. 例如当考虑到太阳系中的行星受到太阳的万有引力这一有心力时, 由于万有引力对太阳这个参考点力矩为零, 所以它们以太阳为参考点的角动量守恒, 这也说明了行星绕太阳公转单位时间内与太阳连线扫过的面积大小总是恒定值的原因.

例 1 匀速圆周运动

如下图所示, 有一质量为 m 的小球 (视为质点), 在轻绳的牵制下, 在光滑的地面上绕 O 点做匀速 (速率为 v) 圆周运动, 如果忽略地面和空气摩擦阻力,

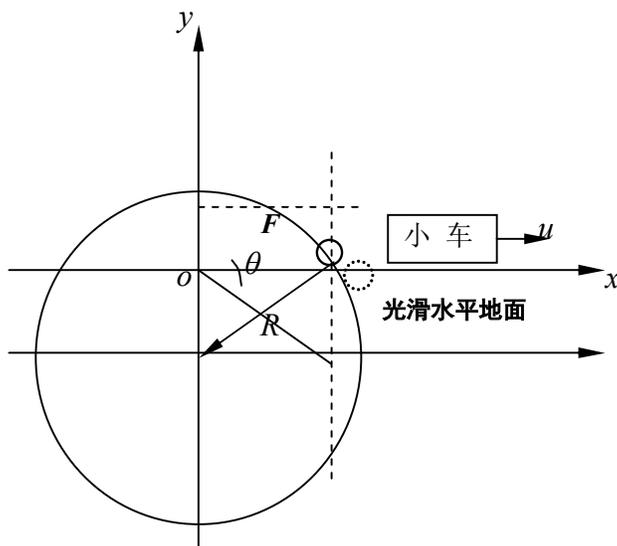


图 1 匀速圆动物体角动量定理成立问题

问: 小球在地面系和沿 x 轴匀速运动的小车 (设小车的速度为 u) 坐标系 $(O_1-x_1y_1)$, 角动量定理是否都成立?

解析: 地球质量视为充分大, 故稳定地保持为惯性系.

1、在地面系——设初相为 0, $v=\omega R$,

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y=R\sin\omega t \\ x'=-R\omega\sin\omega t \\ y'=R\omega\cos\omega t \\ f_x=m x''=-mR\omega^2\cos\omega t \\ f_y=m y''=-mR\omega^2\sin\omega t \\ L=R \times f = \mathbf{0}, \text{质点对圆心的角动量大小为 } mR^2\omega, \text{方向不变, 角动量定理成立.} \end{cases}$$

2、小车系

将运动方程作伽利略变换, 写出小车系运动方程:

$$\begin{cases} x_1=x-ut=R\cos\omega t-ut \\ y_1=y=R\sin\omega t \\ x'_1=x'-u=-R\omega\sin\omega t-u \\ y'_1=y'=R\omega\cos\omega t \\ \mathbf{p}=m\mathbf{v}=(-mR\omega\sin\omega t-mu, mR\omega\cos\omega t, 0) \\ \mathbf{r}=(R\cos\omega t-ut, R\sin\omega t, 0) \\ f_x=m x''=-mR\omega^2\cos\omega t \\ f_y=m y''=-mR\omega^2\sin\omega t \\ \mathbf{L}_1=\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1=(0, 0, mR^2\omega+umR\sin\omega t-utmR\omega\cos\omega t) \\ \mathbf{L}'_1=(0, 0, utmR\omega^2\sin\omega t) \\ M_1=\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}=(0, 0, utmR\omega^2\sin\omega t) \end{cases}$$

根据上面的计算可以得出, 角动量不具有伽利略变换的不变性, 合力矩也不具有伽利略变换的不变性, 经典的角动量守恒定律也不具有伽利略变换的不变性, 即不满足力学相对性原理(或者说不具有单独的协变性), 文献[1]和[2]以椭圆运动为例也说明了这个问题.在同一个坐标系中, 质点即使受到有心力的作用, 对某个作用点角动量守恒, 对另一个作用点也可能不守恒, 因为此时合力矩不在为 $\mathbf{0}$.如果角动量守恒定律不满足伽利略变换或者说不具有单独的协变性, 就应当从牛顿力学中独立出来, 这样经典力学便由牛顿力学与角动量守恒定律共同组成, 体系就比较复杂了.

科学中的疑难问题, 是科学迄今尚未征服的领域.对于疑难问题的探索求解, 从来都是科学研究中最活跃、最富生命力的部分, 是科学活动的本性所在.科学中的疑难直接相关于科学理论本身的结构及其实际的发展水平.当科学信念与科学事实发生冲突时, 就出现科学中的疑难.这不一定只限于理论的推论与实验事实直接矛盾这一种情况.当一个深信其成立的命题还未得到理论的严格证明时, 它也会成为人们为之困惑的疑难问题.科学中的各种疑难是具有不同的价值的.就是说, 有的疑难问题的探索求解对于一个学科的发展至关重要, 有的则不那么重要.然而, 辨认出一个学科中的关键疑难并非易事.在许多科学家看来, 科学难题正是科学进步的阶梯.

二、对于角动量守恒定律表述的重新思考

笔者认为, 不具有单独协变性的命题不能称之为力学定律(或者力学定理), 作为力学定律(或者力学定理)必须具有普遍性, 不能等同于一般的真命题, 对于某一个确定的物理过程, 在一个惯性系成立, 在另一个惯性系也必须成立(在这里所说的成立不仅包括命题的条件成立, 结论也必须成立, 即具有单独的协变性).力学定律或者定理的推论可以不具有单独的协变性, 在一个惯性系里条件和结论都成立, 在其他惯性系里条件不再成立从而导致结论也不成立.显然经典的角动量守恒定律不能满足这个要求, 而且在很多情况下质点受到的合力矩不等于 $\mathbf{0}$, 因此有必要重新表述角动量守恒定律, 使其满足上述要求. [4]

把角动量定理的两边同时积分可以得到**角动量定理的积分形式**——质点对于某一点(或某轴)的角动量

$$\int_{t_0}^t M dt$$

与该点受到的合力矩对于时间的积分之差**不变**. 即 $\mathbf{L}(t) - \mathbf{L}(t_0)$

该命题与角动量定理的微分形式是等价命题, 显然具有伽利略变换的不变性, 满足力学相对性原理, 也具有单独的协变性.

力矩可以与角动量的方向相同, 也可能相反, 因此保守力力矩既能质点的角动量的大小, 也能改变角动量的方向, 下面类比于机械能中势能的概念我们引入

定义: 质点对于某一点(或某轴)受到的合力矩对于时间积分的相反数称之为**角动量势**.角动量势记为 $\mathbf{N}(t)=$

$$\int_{t_0}^t M dt$$

角动量守恒定律——如果质点受到的合力矩为 $\mathbf{0}$ ，质点对于某一点（或某轴）的角动量与角动量势可以相互转化，但是它们之和不变，并且对于不同的惯性系该守恒量相等。 $L(t) + N(t) = L(t_0)$ 。

朗道的力学中说：“如果系统整体相对参考系 K' 静止，则 \mathbf{V} 是系统质心的速度，而 $\mu \mathbf{V}$ 是系统相对于参考系 K 的总动量 \mathbf{P} ，进而有 $\mathbf{M} = \mathbf{M} + \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ 。就是说，力学系统的角动量是由其相对静止的参考系中的“内禀角动量”和整体运动的角动量 $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$ 构成。

在上面的命题中，当合力矩也等于 $\mathbf{0}$ 时，便是经典的角动量守恒定律，符合玻尔的对对应原理，即经典的角动量守恒定律是上述命题的一个特例，当然也是角动量定理的一个特例。在单摆问题可以从机械能的角度分析，也可以从角动量的角度分析，摆锤相对于悬挂点的角动量在不断地变化，合力矩在不断地变化，从而角动量势也在不断地变化，可是其和不断，因此只要不存在非保守力，将一直运动下去。在地球绕日运动的椭圆轨道中，以太阳为参照系角动量守恒，以相对于太阳匀速运动的参照系看来角动量不守恒，但是如果把地球看做质点，只受到保守力作用，因此角动量与角动量势之和守恒。容易验证在上面的匀速圆周运动中，考察上述的命题显然满足伽利略变换的不变性。

角动量守恒定律与重力机械能守恒定律之间的类比——角动量类似于动能，角动量势类似于重力势能，动能和重力势能可以变化，但是机械能不变，角动量和角动量势可以变化，但是它们的和不变。对于不同的惯性系，质点的动能和重力势能可以不同，但是重力机械能不变[3]，同理对于不同的惯性系，角动量与角动量势可以变化，但是它们之和不变（例如地球围绕太阳公转，以太阳为参考点，地球看做质点的话，受到的合力矩为 $\mathbf{0}$ ，可是事实上地球并不是质点，其内部存在着其他力，因此地球的公转的角动量应该稍微减少，不过日一地轨道角动量是十分巨大的，相比之下地球的自转角动量十分渺小，不容易观察而已）。区别：对于不同的惯性系，重力机械能的守恒量不相同，但是角动量与角动量势之和的守恒量不变，因为它描述的是质点的旋转特性，对于不同的惯性系，旋转特性相同。该旋转量对于不同的惯性系都成立，所以在狭义相对论框架内角动量守恒定律也是成立的。在一个物理过程中只要非保守力的力矩为 $\mathbf{0}$ ，在同一个坐标系中只要对于一个参考点旋转量守恒，那么对于该坐标系中所有的参考点旋转量都守恒，在其它惯性系中的所有的参考点旋转量都守恒。在物理学中，发现任何一个能概括许多现象的守恒量都是令人欣喜的事。

动量守恒定律和能量守恒定律以及角动量守恒定律一起成为现代物理学中的三大基本守恒定律。最初它们是牛顿定律的推论，但后来发现它们的适用范围远远广于牛顿定律，是比牛顿定律更基础的物理规律，是时空性质的反映。其中，动量守恒定律由空间平移不变性推出，能量守恒定律由时间平移不变性推出，而角动量守恒定律则由空间的旋转对称性推出；相互间有作用力的物体系统称为系统，系统内的物体可以是两个、三个或者更多，解决实际问题时要根据需求和求解问题的方便程度，合理地选择系统。

参考文献：

- 1 高炳坤. 用伽利略变换审视牛顿力学. 《大学物理》. 2010, 29 (6) : 1~2, 8.
- 2 易双萍. 不同惯性系中的力学规律. 《物理与工程》. 1998 (5) .
- 3 赵文桐, 刘文芳, 刘明成. 重力机械能在各惯性系都成立. 物理通报, 2015 (3) : 96~98.
- 4 刘一贯. 关于机械能守恒定律的协变性, 华南师范大学学报 (自然科学版). 1985 (1) : 155~157.

5/4/2017