贝尔不等式与布尔代数

谭天荣

青岛大学 物理系 青岛 266071

ttr359@126.com

内容提要：对于量子力学来说，经典概率论是不必要的。但是，如果有人硬是把经典概率论应用于微观物理学将会得到什么样的结果呢？是一定会与量子力学相矛盾呢？还是相反，在某种条件下经典概率论也会与量子力学殊途同归呢？迄今为止，没有人考察过这一问题，从而与该问题相关的领域在微观物理学形成了一个盲区。当问题涉及量子力学与经典物理学之间的关系时，人们就难免会在这个盲区里误入歧途，贝尔定理就是一个典型的例子。

贝尔定理的证明多种多样，但万变不离其宗，这些证明都用到经典概率论，特别是用到其中的关于“联合概率”的运算规则，这些规则是否适用于贝尔所考察的过程的问题，刚好落在这个微观物理学的盲区之内。人们在这里不自觉地遵循如下准则：当他们从量子力学的角度考虑问题时，默认这些规则全都不适用于微观过程，当他们从定域隐变量理论的角度考虑问题时，又默认这些规则全都适用于微观过程。贝尔定理就是这种荒谬的准则的产物。

在贝尔定理的证明中，那些被认为表现了“定域隐变量理论”特征的命题，可以归结为自旋相关函数的一个“经典表达式”，但绝不是这个表达式导致贝尔不等式。理由有二：第一，从这个表达式可以导出量子力学的自旋相关公式；第二，在导出贝尔不等式时，还用到了一个隐蔽的命题，从而用到了经典概率论的事件运算规则，即布尔代数的规则。由此得出结论：贝尔不等式之所以与量子力学相矛盾，既与定域性原理无关，也与隐变量理论无关；只不过是因为人们在推导它时，曾经对“非布尔”的微观事件空间应用了布尔代数的运算规则。

[New York Science Journal. 2008;1(4):37-46]. (ISSN: 1554-0200).

关键词：贝尔不等式；定域性原理；隐变量理论；自旋相关公式；经典概率论；联合概率；布尔代数；概率运算；事件运算；量子力学

1. 引言

1964 年，J. S. 贝尔在一份名为《物理》的杂志的创刊号上，发表了题为《论 EPR 佯谬》的论文，提出了“贝尔定理”，其原始形式是：

“在一个在量子力学上增添一些参量以确定单次测量的结果而又不改变其统计预言的理论中，必须有某种机制，使得一个测量仪器的安置会影响另一个仪器的读数，不论它们相距多么遥远。此外，所用的信号必须是瞬时传播的，因此这样的理论不可能是洛仑兹不变的。”

在这里，所谓“在量子力学上增添一些参量以确定单次测量的结果的理论”就是“隐变量理论”。另一方面，按照“定域性原理”，当两个测量仪器相距足够远时，一个测量仪器的安置

不可能影响另一个仪器的读数。因此，贝尔的上述结论可表成：“如果一个隐变量理论不改变量子力学的统计预言，就一定会违背定域性原理。”或者说：“如果一个隐变量理论遵循定域性原理，就一定会改变量子力学的统计预言。”人们把遵循定域性原理的隐变量理论称为“定域隐变量理论”，于是，贝尔定理最终表成现在常见的形式：“任何定域隐变量理论不可能重复量子力学的全部统计预言。”

因为“实在论”被认为是隐变量理论的哲学前提，从而所谓“定域实在论”（满足“定域性原理”的“实在论”）被认为是“定域隐变量理论”的哲学前提。因此，人们根据贝尔定理得出结论：量子力学与“定域实在论”相互排斥。同时人们还得出结论：可以用实验来判断量子力学与“定域实在论”孰是孰非，从而在物理学史上，开了一个通过物理实验来检验哲学观点的先例。

因此，贝尔定理对物理学的影响极为深远，1973 年诺贝尔物理奖得主约瑟夫森把它称为“物理学中最重要的新进展”，物理哲学家斯塔普则把它称作“科学中最深刻的发现”。

在本文中，我们将给出贝尔不等式的一种新推导，并重新认识贝尔定理。

2. 自旋相关函数的经典表达式

量子力学伴随着一种新的概率计算程式，对应地，原来的概率计算程式就被称为“经典概率论”。对于量子力学来说，经典概率论是不必要的。但是，如果有人硬是把经典概率论应用于微观物理学将会得到什么样的结果呢？是一定会与量子力学相矛盾，还是相反，在某种条件下经典概率论也会与量子力学殊途同归呢？这个问题并不艰深，可是由于人们一直不屑于思考它，迄今为止，与这一问题相关的领域还是微观物理学的一个盲区。对于量子力学自身的发展来说，这个盲区的存在并不碍事，但当问题涉及量子力学与经典物理学之间的关系时，人们就难免会在这个盲区里误入歧途，贝尔定理就是一个典型的例子。

贝尔定理的证明多种多样，但万变不离其宗，这些证明都用到经典概率论，特别是用到其中的关于“联合概率”的运算规则，这些规则既不属于量子力学，也不是定域隐变量理论的组成部分。因此，在没有弄清楚这些规则是否适用于微观过程之前，无论从量子力学出发还是从定域隐变量理论出发，都不能应用它们。不幸的是，关于这些运算规则是否适用微观过程的问题，刚好落在这个微观物理学的盲区之内。因此贝尔定理的研究引导物理学家们走进了该盲区，人们在这里不自觉地遵循如下准则：当他们从量子力学的角度考虑问题时，默认这些规则全都不适用于微观过程，当他们从定域隐变量理论的角度考虑问题时，又默认这些规则全都适用于微观过程。为了澄清由这一荒谬的准则所引起的混乱，现在我们就来考察经典概率论的运算规则是否适用于微观过程的问题，先考察一个特殊的联合概率。

实验证明：如果一个电子束（或其他自旋 1/2 的粒子束）L经过一个磁场方向为**a**的斯特恩-革拉赫装置G_a，将被分裂为两束，其中一束向**a**方向偏转，另一束则向–**a**方向偏转。这个实验事实表明：电子自旋（电子的角动量）沿磁场方向的投影只能取两个值，以$\hbar/2$为单位，这两个值分别是 1 和–1。用σ_a表示电子束L中的某一电子的自旋沿**a**方向的投影，则测量的结果要么是

$\sigma_a = 1$，要么是 $\sigma_a = -1$。其中测量结果为$\sigma_a = 1$ 的诸电子形成一个新的电子束A，让它再经过一个磁场方向为**b**的斯特恩-革拉赫装置G_b，则它将再次分裂为两束，其中一束的自旋的测量值为 $\sigma_b = 1$；另一束为 $\sigma_b = -1$。如果电子束A有N个电子，其中有pN个在G_b中的测量结果为 $\sigma_b = 1$，则实验证明，当N足够大时，p的取值与N无关。根据概率的频率定义，p是A中的某一单个电子在其初态是 $\sigma_a = 1$ 的条件下，经过G_b，达到终态 $\sigma_b = 1$ 的概率，这是一个“条件概率”，我们把它记作$\Pr(\sigma_b = 1|\sigma_a = 1)$。一般地说，对于 $x,y \in \{1, -1\}$（即x与y要么是 1 要么是-1），$\Pr(\sigma_b = y|\sigma_a = x)$ 是A中的单个电子从 $\sigma_a = x$态“跃迁”至 $\sigma_b = y$态的概率。

设e是电子束L中的单个电子，它在G_a中获得测量值 $\sigma_a = 1$ 的概率依赖于电子束L的性质，因此这个概率应写作$\Pr(\sigma_a = 1|L)$。在一定条件下，表达式中的符号L可以略去，这个概率就被略写作$\Pr(\sigma_a = 1)$。

用X表示事件“e在G_a中获得测量值 $\sigma_a = 1$”；Y表示事件“e在G_b中获得测量值 $\sigma_b = 1$”，则根据概率的乘法公式，在略去符号L的前提下，积事件X · Y表示事件“e在G_a中获得测量值 $\sigma_a = 1$ 并且在G_b中获得测量值 $\sigma_b = 1$”，其概率为

$$\Pr(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1) = \Pr(\sigma_a = 1) \cdot \Pr(\sigma_b = 1|\sigma_a = 1)。$$

一般地说，对于 $x,y \in \{1, -1\}$，概率的乘法公式表成

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y) \equiv \Pr(\sigma_a = x) \cdot \Pr(\sigma_b = y|\sigma_a = x)。 \quad (1)$$

这里的$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y)$ 就是我们要考察的联合概率，因为$\Pr(\sigma_a = x)$ 有一个隐蔽的初始条件L；这个联合概率也是如此。

在微观物理学中，联合概率$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y)$ 是没有定义的，我们可以把(1)式当作它的“操作定义”。

贝尔定理的中心点是贝尔不等式，而贝尔不等式是一个关于“自旋相关函数”的公式。下面，我们先给出该函数的定义，再为该函数给出一个人们在实践中反复应用，但却始终没有明确表述的“经典表达式”。

玻姆曾经提出如下的理想实验：一个电子源不断发射成对的电子，每对电子都处于“单态”，即总自旋为零的状态。设e和e’ 是其中的一对电子，e 向右飞遇到磁场方向为**a**的斯特恩-革拉赫装置，获得自旋（分量）的测量值σ_a，与此同时，e’ 向左飞遇到装置磁场方向为**b**的装置获得自旋的测量值τ_b。在这个实验中，σ_a和 τ_b可以同时测量，因此，如果我们将这个实验重复N次，则对于给定的 $x,y \in \{1, -1\}$，可以记录下其中的测量结果为 $\sigma_a = x, \tau_b = y$ 的实验的次数N_{xy}。根据概率的频率定义，当N足够大时，同时测量 σ_a和 τ_b时获得测量结果为 $\sigma_a = x, \tau_b = y$ 的概率为

$$\Pr(\sigma_a = x, \tau_b = y) = \frac{N_{xy}}{N}。$$

下面，我们规定$\sum_x$表示对 $x \in \{1, -1\}$取和，$\sum_{xy}$ 表示对 $x,y \in \{1, -1\}$取和，$\sum_{xyz}$ 表示对 $x,y,z \in \{1, -1\}$取和。借助于上面的概率，可以定义σ_a和 τ_b的乘积的平均值

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \sum_{xy} xy \Pr(\sigma_a = x, \tau_b = y), \quad (2)$$

$P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 就是e和e’ 的“自旋相关函数”。这个定义可以用测量的数据表成

$$\mathrm{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{xy} xy\, \mathrm{N}_{xy},$$

从而是“自旋相关函数”的原始定义。

实验证明：如果$\mathbf{b} = \mathbf{a}$，则 $\tau_b = -\sigma_a$。这一结果可表成

$$\tau_b = -\sigma_b。\tag{3}$$

应用经典概率论，从(3)式可以得出

$$\sum_{xy} xy\, \Pr(\sigma_a = x, \tau_b = y) = -\sum_{xy} xy\, \Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y)。\tag{4}$$

(2)式与(4)式给出

引理 1：任意给定单位矢量 **a** 和 **b**，对于由(1)式给出的联合概率，有

$$\mathrm{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\sum_{xy} xy\, \Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y)。$$

这就是我们所说的自旋相关函数的“经典表达式”。为了重新考察贝尔定理，我们首先要弄清这个表达式是否适用于微观过程。

虽然$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y)$的取值与L有关，但根据引理 1，我们可以引进一个与L无关的函数

$$\mathrm{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \sum_{xy} xy\, \Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = y)。\tag{5}$$

它与自旋相关函数的关系是

$$\mathrm{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\,\mathrm{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b})。\tag{6}$$

3. 两个定理

贝尔曾经证明：“贝尔不等式与量子力学不相容”，这一命题的正确性是不容置疑的，问题在于从这一命题是否真的能得出贝尔定理，即是否真的能得出定域隐变量理论与量子力学不相容。在这里，我们将对贝尔不等式给出一种新的推导，从这一推导可以看出：在贝尔导出贝尔定理过程中，实际上用到了两个前提，一个是显露的，另一个是隐蔽的。显露的前提就是所谓“定域隐变量理论”，它的作用实际上可以由一个自旋相关函数的“经典表达式”来取代，而从这一前提也可以导出量子力学的自旋相关公式。由此可见，那个隐蔽的前提才是导致贝尔不等式的真正元凶。

实验证明

A：对于任意单位向量**a**和**b** 及其夹角$\gamma = \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$，有：

$$\Pr(\sigma_b = 1 | \sigma_a = 1) = \Pr(\sigma_b = -1 | \sigma_a = -1) = \cos^2(\gamma/2);$$

$$\Pr(\sigma_b = 1 | \sigma_a = -1) = \Pr(\sigma_b = -1 | \sigma_a = 1) = \sin^2(\gamma/2)。$$

由于 $\sigma_a = 1$ 与 $\sigma_a = -1$ 是两个相互对立的事件，经典概率论给出：

$$\Pr(\sigma_a = 1 | \mathrm{L}) + \Pr(\sigma_a = -1 | \mathrm{L}) = 1,$$

它可以略写为

$$\Pr(\sigma_a = 1) + \Pr(\sigma_a = -1) = 1。\tag{7}$$

再把$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y)$略写成 $f(x, y)$，则根据(1)式、(7)式与命题A，容易证明：

$$f(1,1)-f(-1,1)-f(1,-1)+f(-1,-1) \;=\; \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}。$$

另一方面，根据定义，我们有：

$$\sum_{xy} xy\, f(x,y) \;\equiv\; f(1,1)-f(-1,1)-f(1,-1)+f(-1,-1)。$$

上面诸式给出

引理 2：任意给定单位矢量 **a** 和 **b**，对于由(1)式定义的联合概率，有

$$\sum_{xy} xy\,\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_b=y) \;=\; \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}。$$

引理 1 与引理 2 给出量子力学的自旋相关公式

$$\mathrm{P}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \;=\; -\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}。$$

在上面的推导中，引理 2 是从命题 A、(1)式和(7)式导出的，命题 A 是一个实验事实，而(7)式不证自明，因此我们证明了

定理 1：从(1)式与引理 1 的合取，可以导出量子力学的自旋相关公式。

定理 1 表明(1)式与引理 1 的合取与量子力学相容。从而得出结论：(1)式与引理 1 都与量子力学相容，即：

第一，联合概率 $\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_b=y)$ 的操作定义与量子力学相容。

第二，自旋相关函数的经典表达式与量子力学相容。

另一方面，经典概率论又给出：

$$\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_b=y) \;=\; \sum_{z}\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_b=y,\,\sigma_c=z); \tag{8}$$

$$\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_c=z) \;=\; \sum_{y}\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_b=y,\,\sigma_c=z)。 \tag{8a}$$

$$\mathrm{Pr}(\sigma_b=y,\,\sigma_c=z) \;=\; \sum_{x}\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_b=y,\,\sigma_c=z); \tag{8b}$$

把 $\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_b=y,\,\sigma_c=z)$ 略写作 $\mathrm{F}(x,y,z)$，考虑到概率不能取负值，则有：

B：任意给定单位矢量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 和 $x,y,z\in\{1,-1\}$，存在函数 $\mathrm{F}(x,y,z)\geqslant 0$，使得

$$\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_b=y) \;=\; \sum_{z}\mathrm{F}(x,y,z);$$

$$\mathrm{Pr}(\sigma_a=x,\,\sigma_c=z) \;=\; \sum_{y}\mathrm{F}(x,y,z);$$

$$\mathrm{Pr}(\sigma_b=y,\,\sigma_c=z) \;=\; \sum_{x}\mathrm{F}(x,y,z)。$$

应用(5)式，可以从命题 B 得到

C：任意给定单位矢量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$，存在函数 $\mathrm{F}(x,y,z)\geqslant 0$，使得

$$\mathrm{E}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \;=\; \sum_{xyz} xy\,\mathrm{F}(x,y,z),$$

$$\mathrm{E}(\mathbf{a},\mathbf{c}) \;=\; \sum_{xyz} xz\,\mathrm{F}(x,y,z),$$

$$\mathrm{E}(\mathbf{b},\mathbf{c}) \;=\; \sum_{xyz} yz\,\mathrm{F}(x,y,z)。$$

从命题 C 容易导出不等式

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leqslant 1 - E(\mathbf{b}, \mathbf{c})。 \tag{9}$$

(6)式与(9)式给出贝尔不等式：

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leqslant 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c})。$$

从而我们证明了

定理 2：从引理 1 和命题 B 可导出贝尔不等式。

考虑到引理 1 与量子力学相容，而贝尔不等式与量子力学不相容，从定理 2 可得出结论：命题 B 是贝尔不等式唯一的前提。于是我们得出结论：命题 B 与量子力学不相容。

4. 事件运算的布尔代数

如果说从(1)式与引理 1 导出量子力学的自旋相关公式，是经典概率论与量子力学殊途同归的一个例子；那么，命题 B 与量子力学不相容则是经典概率论与量子力学相矛盾的一个例子。第一个例子表明，经典概率论的某些运算规则适用于微观过程，而第二个例子则表明并非经典概率论的所有运算规则都适用于微观过程。有待解决的问题是：在经典概率论中，哪些运算规则适用于微观过程，哪些运算规则不适用于微观过程。

我们已经看到，命题 B 是贝尔不等式唯一的前提，因此这一问题归结为弄清楚命题 B 有甚么毛病。

命题 B 可推导如下：

第一步，定义联合概率 $\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)$。

第二步，从概率的频率定义得到(8)式：

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y) = \sum_z \Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)。$$

第三步，适当交换 $\sigma_a = x$， $\sigma_b = y$ 和 $\sigma_c = z$ 的次序，从(8)式得到：

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_c = z) = \sum_y \Pr(\sigma_a = x, \sigma_c = z, \sigma_b = y);$$

$$\Pr(\sigma_b = y, \sigma_c = z) = \sum_x \Pr(\sigma_b = y, \sigma_c = z, \sigma_a = x)。$$

第四步，根据经典概率论的公式

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_c = z, \sigma_b = y) = \Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z);$$
$$\Pr(\sigma_b = y, \sigma_c = z, \sigma_a = x) = \Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z), \tag{10}$$

从第三步的两个等式得到(8a)式与(8b)式。

第五步，从(8)式、(8a)式与(8b)式，以及 $\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z) \geqslant 0$ 得到命题B。

下面，我们逐步地审查这些步骤。

比照(1)式，联合概率$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)$可以定义如下：

如果 $\sigma_a = x$、$\sigma_c = z$ 和 $\sigma_b = y$ 是三个相继测量的结果，即一个有N个电子电子束通过一个磁场方向为**a**的斯特恩-革拉赫装置G_a时，有N_x个电子的自旋测量值为 $\sigma_a = x$，让这N_x个电子继续

通过一个磁场方向为**c**的斯特恩 - 革拉赫装置G_c，设有N_{xz}个电子的自旋测量值为$\sigma_c = z$，让这N_{xz}个电子继续通过一个磁场方向为**b**的斯特恩 - 革拉赫装置G_b，设有N_{xyz}个电子的自旋测量值为$\sigma_b = y$，则当N足够大时，我们可以定义

$$\Pr(\sigma_c = z|\sigma_a = x) = N_{xz}/N_x; \qquad \Pr(\sigma_b = y|\sigma_c = z) = N_{xyz}/N_{xz};$$

$$\Pr(\sigma_a = x) = N_x/N; \qquad \Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z) = N_{xyz}/N。$$

上面诸式给出如下操作定义：

$$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z) \equiv \Pr(\sigma_a = x) \cdot \Pr(\sigma_c = z|\sigma_a = x) \cdot \Pr(\sigma_b = y|\sigma_c = z)。$$

由于(1)式给出的 $\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y)$ 的操作定义与量子力学相容，上面给出的$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)$的操作定义也不会与量子力学相矛盾。但是，对于这一操作定义，(8)式显然不成立。

现在考虑另一过程：还是考虑上面的三个斯特恩 - 革拉赫装置，其中G_a打开一个通道，通过它的诸电子获得自旋$\sigma_a = 1$，G_b也打开一个通道，通过它诸电子获得自旋$\sigma_b = 1$，G_c则同时打开两个通道。设有N个电子进入G_a，其中有N_1个电子在G_c中获得$\sigma_c = 1$并逸出G_b，有N_2个电子在G_c中获得$\sigma_c = -1$并逸出G_b。设e是进入G_a的N个电子之一，则按照概率的频率定义，当N足够大时，e在三个斯特恩 - 革拉赫装置中依次获得自旋$\sigma_a = 1$、$\sigma_c = 1$、$\sigma_b = 1$的概率为

$$\Pr(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1, \sigma_c = 1) = N_1/N;$$

依次获得自旋$\sigma_a = 1$、$\sigma_c = -1$、$\sigma_b = 1$的概率为

$$\Pr(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1, \sigma_c = -1) = N_2/N;$$

另一方面，实验证明，如果上面的实验中的其他条件不变，只去掉斯特恩 - 革拉赫装置G_c，让G_b直接连在G_a之后，则 e在G_a中获得自旋$\sigma_a = 1$，在G_b中获得自旋$\sigma_b = 1$的概率为

$$\Pr(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1) = (N_1 + N_2)/N,$$

从而有

$$\Pr(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1) = \sum_z \Pr(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1, \sigma_c = z)。$$

一般地说，我们就得到(8)式。

诚然，在$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)$的操作定义中，$G_c$的两个通道是轮流打开的，而(8)式右边的同一概率表达式却要求G_c的两个通道同时打开，从而是不能测量的。尽管如此，它还是可以算作是 $\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)$ 的另一种定义。于是我们得出结论：“可以定义联合概率$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)$，使得(8)式成立。”这样，推导命题C的第一步与第二步就同时通过了。

第三步也没有问题，(8)式是一个恒等式，在给定的交换之后确实仍然成立。

然而，第四步就大错而特错了！无论采用$\Pr(\sigma_a = x, \sigma_b = y, \sigma_c = z)$的操作定义还是(8)式所要求的定义，(10)式都肯定不成立。为什么呢？

经典概率论立足于两大基石：概率的频率定义与事件运算的布尔代数规则。概率的频率定义乃是概率这一概念所固有的，它被公认为对于微观过程仍然适用，但事件运算的布尔代数规则却并非如此。

对于经典概率论，事件乘法的交换律

$$A \cdot B = B \cdot A \tag{11}$$

成立。但(11)式也适用于微观世界吗？

让我们考察(1)式的如下特例

$$\Pr(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1) \equiv \Pr(\sigma_a = 1) \cdot \Pr(\sigma_b = 1 | \sigma_a = 1)。 \tag{12}$$

适当改变其中的符号可以得到

$$\Pr(\sigma_b = 1, \sigma_a = 1) \equiv \Pr(\sigma_b = 1) \cdot \Pr(\sigma_a = 1 | \sigma_b = 1)。 \tag{13}$$

用A表示 $\sigma_a = 1$，B表示 $\sigma_b = 1$，则事件运算规则A·B = B·A给出概率公式

$$\Pr(\sigma_b = 1,\ \sigma_a = 1) = \Pr(\sigma_a = 1,\ \sigma_b = 1)。 \tag{14}$$

但是，根据(1)式的操作定义，(12)式与(13)式表示迥然不同的过程，因此(14)式显然不成立，在这种意义下，(11)式不成立。

对于经典概率论，“积事件”A·B 表示“A 事件与 B 事件都发生”，而 B·A 表示“B 事件与 A 事件都发生”，这两个命题等价。但是，如果定义“积事件”A·B 表示“A 事件先发生而 B 事件后发生”，则 B·A 表示“B 事件先发生而 A 事件后发生”，这两个命题就不再等价。我们满可以保留概率的频率定义而适当修改经典概率论的事件运算的规则来建立某种“非布尔的”概率论，而把量子力学的概率运算规则看作其中的一种。

诚然，这是一个离题太远的数学问题，我们只需记住如下要点就够了：在微观世界可以定义(1)式那样的联合概率，并且允许各种概率运算，但不能任意应用布尔代数的事件运算规则。特别是，(11)式不成立。同样，公式

$$(A \cdot B) \cdot C = (A \cdot C) \cdot B。$$

也不成立。导出(10)式时，刚好用到(11)式和上式。因此，(10)式肯定不成立。

既然导出命题 B 的第四步曾用过(10)式，命题 B 的整个推导就是非法的，而贝尔不等式又来自命题 B，可见贝尔不等式的推导也是非法的。这样，我们就不必惊讶贝尔不等式与量子力学相矛盾，也不必惊讶它与实验结果不符了。

一般地说，对于微观过程，事件运算不遵循布尔代数的规则，换句话说，微观事件的事件空间是“非布尔的”。贝尔不等式的推导之所以非法，就是因为对“非布尔的”微观事件空间应用了布尔代数的规则。

5. 一个未证明的命题

由于量子力学的自旋相关公式与贝尔不等式都以引理 1 为前提，对于上世纪 70 年代的那些检验贝尔不等式的实验来说，这个引理不是被检验的对象。另一方面，证明这个引理的关键的前提是(4)式，而(4)式又容易被人认为是不证自明的：人们认为，根据实验事实 $\tau_b = -\sigma_b$，我们可以在 $\Pr(\sigma_a = x, \tau_b = y)$ 中把 $\tau_b = y$ 换成 $\sigma_b = -y$，从而得到

$$\Pr(\sigma_a = x,\ \tau_b = y) = \Pr(\sigma_a = x,\ \sigma_b = -y), \tag{15}$$

于是立刻得到(4)式。

但实际上问题不那么简单，(15)式的两边表示不同的过程：左边涉及两个电子；右边则只

涉及一个电子。左边涉及同时发生的两个事件，其物理意义不容置疑；右边则涉及先后发生的两个事件，我们仅能给出其操作定义。更糟糕的是：右边有一个隐蔽的初始条件而左边却没有。对于这样含义迥然不同的两个概率表达式，像上面那样的“替换”运算是相当可疑的。

可以证明，(15)式并不成立而(4)式却确实成立。在这里，我先不给出这一证明。原因有二：第一，这一证明极为冗长而又曲折，远不是引人入胜的，我担心读者没有耐心读它；第二，由于我对贝尔定理的看法冒犯权威，难免受到谴责。但是，如果有一天我的看法得到了公认，我又免不了从另一方面受到谴责，人们会说我的看法“没有任何新内容，它的全部公式与命题都只不过把别人的东西拿来改头换面而已。”明察秋毫的批评家们将揭露：文中有某一句话与张三说过的话雷同（至于这句话与我的证明有没有关系，倒是不必深究的），或者，文中有三两句话与李四说过的话意思相近，等等。由此就无情地得出结论：除了剽窃和故弄玄虚以外，我的看法一无是处。与其到那时我走投无路，倒不如今天留一个心眼，把这个关键的证明先装在口袋里，到时候我虽然铁定是剽窃者，但至少还拥有对于这个证明的优先权。

6. 结束语

我们已经看到，贝尔不等式起源于事件运算的布尔代数规则，它既与定域性原理无关，也与隐变量理论无关。因此，上世纪 70 年代的那些检验贝尔不等式的实验，只不过再一次确认“微观过程的事件空间是非布尔的”，这一工作似乎很难说是一个“物理学中最重要的进展”，更难说是一个“科学中最深刻的发现”。

Bell’s Inequality and Boolean algebra

TAN Tianrong

(Department of Physics, Qingdao University, Qingdao 266071, P. R. China.)

ttr359@126.com

Abstract: As it is known that classical probability theory is unnecessary for quantum mechanics, but another problem remains to be solved: how goes it if applying classical probability to micro processes. It is sure to obtain some conclusion in conflict with quantum mechanics; or quite the reverse, from classical probability we will reach the same goal herein as quantum mechanics? Up to now, this problem has never been examined, and thereby the field it concerning forms a blind area in micro physics. When the question involves the relation between classical physics and quantum physics, it is hard to avoid going astray in this blind area. Bell’s theorem is just a typical example herein.

Despite for Bell’s theorem the proofs are varied, the same essential character remains. All of these proofs the laws of classical probability theory, specially, the laws of unite probabilities, has used. The question whether these laws suitable for the process that Bell consider exactly falls on the above blind area. Herein quantum physicists obey consciously the following norm: They tacitly approve that all these laws are unsuitable for micro processes when starting from quantum mechanics, and acquiesce those are suitable when starting from local hidden variable theory. Bell’s theorem is just a product of such an absurd norm.

In the proof of Bell's inequality, the theses, which characterize, as generally believed, local hidden variable theory, can be summed up as a classical expression of the spin correlation function. But this expression never leads to Bell's inequality for the following reasons: Firstly, from it we can derive the spin correlation function expression in quantum mechanics. Secondly, in the course to derive Bell's inequality, a proposition originating from Boolean algebra rules in classical probability theory is used unawarely. From the above two reasons it is concluded that Bell's inequality originates from the step applying Boolean algebra rules on the non-Boolean micro event space, and it is related neither to locality nor to hidden variables.

Key words: Bell's inequality; locality principle; hidden variable theory; spin correlation formula; classical probabilistic theory; probability operations; event operations; Boolean algebra; quantum mechanics