数学归纳法的拓广

李学生

山东大学副教授，中国管理科学院学术委员会特约研究员、北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员

xiandaiwulixue@21cn.com

摘要： 本文指明数学归纳法的实质在于递推，将其从正整数集逐步推广至整数集、实数集、有理数集、复数集等集合，从普通加法运算推广至一般抽象运算，给出了一般集合上的数学归纳法，为数学命题的证明开辟了一条新的道路，同时举例说明了其应用。[New York Science Journal. 2009;2(4):74-76]. (ISSN: 1554-0200).

关键词 ：数学归纳法、递推、整数集、实数集、抽象运算。

数学归纳法通常是证明与正整数集有关命题的一种重要的论证方法，许多数学命题利用其它数学方法很难证明或者根本无法证明，但利用数学归纳法很容易解决。数学归纳法的理论根据是正整数集的序数理论，为了证明命题的需要而演变成了多种形式，同时将数学归纳法从正整数集推广至所有良序集。

定义：设 S 是一个集合，≤是 S 中一个二元关系，满足 ① 对任何 x∈S 有 x≤x; ② 对任何 x、y∈S 有 x≤y 且 y≤x 可得 x＝y; ③对任何 x、y、z∈S 有 x≤y 且 y≤z 可得 x≤z，④ 对任何 x、y∈S 均有 x≤y 或 y≤x; ⑤若 S 的任何非空子集有最小元。则称 S 是良序集。

超限归纳法原理：设（S，≤ ）是一个良序集，P（x）是与元素 x∈S 有关的一个命题，①如果对于 S 中的最小元 a_0，P（a_0）成立；②假定对于任何 x＜a, P（ x ）成立，可证明 P(a)也成立。则 P(x)对任何 x∈S 都成立。

根据上面的理论，集合 M＝｛n_0,n_0+1,n_0+2, ••••••｝，n_0∈ Z, 对于普通数的大小是良序的，因此类似于正整数集也可以列出数学归纳法的各种形式．整数集与实数集对于普通数的大小不是良序的，但可对其重新规定序使其成为良序集，不过有时给证明命题带来很大困难．倘若我们从另一个角度审视数学归纳法会发现数学归纳法的理论根据是正整数集的序数理论，其实质在于递推．

（一）整数集上的数学归纳法原理

定义：任何一个非空集合 Z 的元素叫做整数，如果在这个集合里的所有元素之间有两种基本关系－＂前继＂与＂后继＂满足下面的公理：① 对任何一个数 a，存在着且仅存在者一个后继数 a' 与前继数'a；②任何数只能是一个数的后继数与另一个数的前继数；③ 存在 a∈N，且 a∈Z；④（归纳公理）设 Z 有一个子集 M，满足条件

Ⅰ Z_0∈M,且 Z_0∈Z;

Ⅱ 若 a∈M，有'a∈M，a' ∈M.则 M=Z.

1、 第一数学归纳法原理：设有一个关于整数集 Z 的命题 p(Z),①若存在 Z_0∈Z，p（Z_0）成立；②若 p(k)成立，则 p(k+1)与 p(k-1)均成立。那么对于任意整数 Z，p(Z)都成立.

证明：设 M 是使命题 p（Z）成立的整数集合，于是：①因为存在 Z_0∈Z，p（Z_0）成立，故得 Z_0∈M：②因为假定 p(k)成立的条件下，能推出 p(k+1)与 p(k-1)成立，即由 k∈M 能推出'k∈M,k'∈M.

因此集合 M 具有整数定义中归纳公理的条件①②,由归纳公理得 M=Z。故 p(Z)对于任意整数 Z 都成立.

2、 第二数学归纳法原理：设有一个关于整数 Z 命题 p(Z)。①若存在 Z_0∈Z，$p(Z_0)$成立；②设 $Z_0 \leqslant x < k_1$,若 p(x)成立，则 $p(k_1)$成立；③设 $k_2 < x \leqslant Z_0$,若 p(x)成立，则 $p(k_2)$成立。那么 p(Z)对于任意整数 Z 均成立。注：k_1 与 k_2 为整数。

证明：假设 p（Z）不是对于所有整数均成立，根据整数集的序数理论，可以找到一个整数 Z_1，不妨设 $Z_1 \geqslant k_1$(当 $Z_1 \leqslant k_1$ 时，证明类似)，使 $p(Z_1)$不成立，而 $p(Z_1-1)$成立。根据归纳假设--由 p(x)，$k_1 \leqslant x < Z_1-1$ 成立，得 $p(Z_1)$成立.这与前面的假设相矛盾。故 p(Z)对于任意整数均成立。

数学归纳法可以应用于整数集的实质在于整数集中相邻两数的差为定值 1，那么它也可以应用于其它公差为定值或公差为统一公式的数集，例如集合 M={n_0,n_0-1,n_0-2,…}，n_0∈Z。奇数集或偶数集也可以建立其序数理论，方法及证明类似于整数集，只不过将 k±1 变为 k±2 即可。

综上所述，数学归纳法可以应用于整数集及其某些子集，而数论主要是研究整数性质的，所以数学归纳法的拓广可能有助于数论的研究，例如可以把某些关于正整数的命题推广至整数集等。下面举例说明数学归纳法在整数集中的应用。

例 1 求证：对于任意整数 x，$f(x)= 0.2x^5+1/3x^3+ 7/15x$ 是一个整数。

证明：①当 x=0 时，f(x)=0 命题成立。②假定当 x=k 时命题成立，即 $f(k)=0.2k^5+1/3\ k^3+7/15k$ 为整数,

则当 x=k±1 时 $f(k\pm1)=0.2\ (k\pm1)^5+1/3\ (k\pm1)^3+7/15(k\pm1)=(k^5/5+k^3/3+7k/15)\pm k^4+2k^3+3k^2+4k\pm1$ ∈Z。

这说明当 x=k±1 时命题成立。由①②可知，对于任意整数 x，原命题均成立。

下面笔者举出几例，作为引玉之砖。

① 当 n 为任何非负偶数时，x^n-1 都可以被 x+1 整除；当 n 为任何非负偶数时，x^n+1 都可以被 x+1 整除；

② n^3+5n 能被 6 整除（n∈Z）。

③ 若 x∈Z,$x^3+2x+3y=0$,则 y∈Z.

④ 已知：$x+x^{-1}=2\cos\theta$。求证：$x^n+x^{-n}=2\cos n\theta$,n∈Z.

㈡实数集上的数学归纳法

在运用数学归纳法证明有关整数集上的命题时，初始值取一个数，若将初始值变为一个区间，则可证明实数集上的某些命题。下面列出实数集上的第一数学归纳法原理，其它形式及证明从略。

第一数学归纳法原理：设 p(R)是一个关于实数集的命题。若存在 R_1，R_2∈R，在［R_1，R_2］上命题 p(R)成立；若假设 p(k)成立，能推出 p(k±L)成立，其中 $0 < L \leqslant R_2-R_1$,则 p(R)对于所有实数均成立。

［注］ 若将闭区间改为开区间或半开半闭区间，$0 < L < R_2-R_1$.

例 2 已知：a∈R*，求证：$f(a)=a^8-a^5+a^2-a+1>0$

证明：①若 a∈[0，1]，则 $a^2 \geqslant a^5$,$f(a)==(1-a)+(a^2-a^5)+a^8>0$，命题成立。 ②设 k∈R*，若 $f(k)=k^8-k^5+k^2-k+1 > 0$，则 $f(k+1)=(k+1)^8-(k+1)^5+(k+1)^2-(k+1)+1=(k^8-k^5+k^2-k+1)+8k^7+28k^6+56k^5+65k^4+56k^3+18k^2+5k>0$

∴对于任意 a∈R*，f(a)>0

例 3 运用数学归纳法证明：$2^m>2m+1$,（m∈R,m≥3）。

证明：①当 m∈[3，3.5）时，左边=$2^m \geqslant 8$，右边=2m+1<8，命题成立。

②假设当 m=k 是命题成立，即 $2^k>2k+1$,那么当 m=k+0.5 时，$2^{k+0.5}>（2k+1）2^{0.5}=（2k+1）+（2^{0.5}-1）（2k+1）$。

因为（2k+1）＞3，所以（$2^{0.5}$-1）（2k+1）＞1，即 $2^{k+0.5}$＞2（k+0.5）+1。命题成立。由①②可知，2^m＞2m+1,（m∈R,m⩾3）。

前面我们所讨论的数集都是对加法或减法构成递推数集，实际上任何一个集合（不一定是数集）通过某种运算，能使该集合的各个元素之间具有递推性，原则上也可以利用数学归纳法原理证明,例如双等差数集与集合 M={2^0,2^1,2^2,⋯,2^n,⋯}。因此数论中有些猜想至今没有证明，或许可以构造一种新型运算，使集合中的元素具有递推性，从而得到解决。通过推广数学归纳法还可将某些集合上的命题拓广.下面列出一般集合上的第一数学归纳法原理，其它形式略。

第一数学归纳法原理：设命题 P 是关于集合 M 的命题。通过构造某种运算*，使得集合 M={a_1,a_2,⋯,a_n,⋯⋯}中的元素具有如下关系：a_1*q=a_2,a_2*q=a_3,⋯,a_{n-1}*q=a_n,⋯⋯.若 P(a_1)成立,在假定 P(a_k)成立的条件下,可以推出成立.那么命题 P 对于集合 M 中的任何元素都成立。

注:1、 运算*可以是代数运算,也可以是超越运算,甚至于可以是一般的抽象运算.

2 、元素可以属于集合 M,也可以不属于 M,譬如正整数集中 1∈N*,奇数集中 2 不属于奇数集.

3、当上述方法还是无法证明时 ,可以考虑数学归纳法的其它形式,也可以分成几个集合,定义不同运算分别进行归纳,也可以各种形式混合使用.另外也可以去掉有限个元素后,使其具有递推性,但去掉的元素应单独证明.

4 、有些集合需要多步证明,例如有理数集可分别归纳分子与分母,复数集可分别归纳实部与虚部，或者分别归纳模与辐角.下面列出有理数集上第一数学归纳法原理,其它形式及证明从略.

第一数学归纳法原理:设有一个关于有理数集 Q 的命题 P(Q),①若存在 Z_0∈Z,命题 P(Z_0)成立;②若 P(k)成立(k∈Z),则 P(k')与 P('k)均成立;③任取 m∈Z,若 P(m/n)成立(n∈N),则 p(m/(n+1))成立,那么对于任意有理数 Q,命题 P(Q)均成立.

参考文献:1、《应用近世代数》 胡冠章 清华大学出版社 ， 1993 年版, 25 页—27 页。

2、《数学猜想》 第一卷，数学中的归纳与类比，[美] G・波利亚著 ， 李心灿、王日爽、李志尧译，科学出版社，1987 年 8 月版 ，118 页—132 页

2/24/2009