对于四元数的异议

李学生

山东大学副教授，中国管理科学院学术委员会特约研究员、北京相对论研究联谊会会员，中国民主同盟盟员
xiandaiwulixue@21cn.com

摘要 ：本文从数集的扩展原则与扩展的必要性出发，阐明了哈密尔顿的四元数不能作为复数集的拓广，从而将向量乘法与普通乘法区别开来。[New York Science Journal. 2009;2(4):79-80]. (ISSN: 1554-0200).

关键词：四元数、异议、数集的扩展原则、向量乘法、普通乘法

按照现代数学的观点，数集包括狭义数集与广义数集两大类，狭义数集包括复数与超复数，广义数集包括向量、矩阵等集合，其中超复数起源于四元数，在 1828——1843 年，伟大的数学物理学家哈密尔顿为了物理学研究空间的需要，建立了一种对乘法运算不可交换的数集——四元数（又称超复数）,其一般形式为 ai+bj+ck+d,其中 a、b、c、d 为实数,i、j、k 为虚单位,$i^2=j^2=k^2=-1$,ij=k,jk=i,ki=j,ji=－k,kj=－i,ik=－j.其乘法规则类似于多项式乘法，但不满足交换律，设 $z_1=a_1i+b_1j+c_1k+d_1$，$z_2=a_2i+b_2j+c_2k+d_2$,则 $z_1z_2=-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2)+(b_1c_2+a_1d_2+a_2d_1-b_2c_1)i+(c_1a_1-c_2a_1+b_1d_2+b_2d_1)j+(a_1b_2-a_2b_1+c_1d_2+d_1c_2)k$。对于四元数 ai+bj+ck+d 而言,当 b=c=0 时,四元数便成为复数;当 d=0 时，ai+bj+ck 代表三维向量， a、b、c 分别为其在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，$(a_1i+b_1j+c_1k)(a_2i+b_2j+c_2k)=-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+(b_1c_2-b_2c_1)i+(c_1a_1-c_2a_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$。后来，人们对其分成两部分，$(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)$为数量积，$(b_1c_2-b_2c_1)i+(c_1a_1-c_2a_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$ 为向量积，并分别在物理学中找到了其应用；为了物理学研究空间的需要将其推广为 n 维，并且不满足乘法结合律.。笔者发现把四元数作为复数集的拓广不满足数集的扩展原则与扩展的必要性。

㈠把四元数作为复数集的拓广不满足数集扩展的必要性

数集的每一次扩展，总是由于原来的数集与解决具体问题的矛盾而引起的，这些问题有的是首先从实际中提出 的，有些则是从数学本身首先提出的。为了使除法、减法运算封闭，从正整数集先后扩展到正有理数集合、有理数集合；为了表示无限不循环小数，引进了无理数，从有理数集合扩展到实数集； 为了使开方运算封闭，引进了虚数，从实数集扩展到复数集。在复数集 中，加、减、乘、除、乘方、开方等所有代数运算都已封闭，因此复数集是一个完美的数集，从数学本身来讲没有扩展的必要。退一步讲，假设四元数是复数集的拓广，那么开方运算失去意义，例如∵$i^2=j^2=k^2=-1$，∴－1 的平方根至少有 6 个——±i、±j、±k,其实一个四元数的 n 次方根有无数个解，这样将使开方运算 变为无定解运算。

㈡把四元数作为复数集的拓广不满足数集的扩展原则

①根据数集的扩展原数集作为新数集的特例，原有的运算法则依然成立。

当数集拓广至复数集后，人们迅速发现其在物理学中的应用——可以表示平面向量及其加减运算。但是复数的乘法与向量的乘法有着本质的区别，复数集对于乘法封闭且满足交换律，平面内向量的向量积是一个空间向量，数量积是一个标量。因此为了研究物理学中向量乘法而拓广复数集 是没有必要的，表示向量乘法与普通乘法的符号亦应区别开来，不必定义 $i^2=j^2=k^2=-1$.。向量运算不同于代数运算，没有必要将其纳入代数运算。若将三维向量表示为 a+bi+cj,数量积与向量积分别用“.”与“×”表示，$(a_1+b_1i+c_1j).(a_2+b_2i+c_2j)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$,$(a_1+b_1i+c_1j)\times(a_2+b_2i+c_2j)=(b_1c_2-b_2c_1)+(c_1a_2-c_2a_1)i+(a_1b_2-a_2b_1)j$,从而把向量乘法与普通乘法区别开来，又能作为复数集的拓广.其实这样做对表示向量乘法非常妥当，但它会使普通乘法出现矛盾，复数集对于普通乘法已经封闭，乘积中出现的 ij、ji 无论怎样定义都会出现矛盾，而且与普通乘法的符号不加区别会造成混乱。

② 在向量 ai+bj+ck 中 i、j、k 的意义与复数 a+bi 中的 i 意义不同。

在三维向量 ai+bj+ck 中 i、j、k 是为了区分向量在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量而作的标记，可以规定 $i^2=j^2=k^2$ 为任何实数，但在复数 a+bi 中的 i 有着特殊的含义：$i^2=-1$。在四元数 ai+bj+ck+d 中，当 d=0 时表示三维向量，a、b、c 分别代表在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，因此当 c=0 时，二维向量

应为 ai+bj，a、b 分别代表在 x 轴、y 轴上的分量，但单位不一致 ，前者为 i、j,后者为 1、i,而 $i^2=j^2=-1\neq1$,因此这本身就具有一种不协调性。

综上所述，复数的乘法与向量的乘法有着本质的区别，哈密尔顿的四元数不能作为复数集的拓广，只不过他找到了向量的乘法法则。为了满足数集的扩展原则，笔者建议取消四元数，直接定义向量乘法。为了与复数乘法相区别，定义 i*i=j*j=k*k=1,这样可以避免运算结果中出现负号，其它的规则不变。设向量 $Z_1=a_1i+b_1j+c_1k$, $Z_2=a_2i+b_2j+c_2k$,$Z_1*Z_2=(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+(b_1c_2-b_2c_1)i+(c_1a_2-c_2a_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$,其中前者 $(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)$表示数量积，后者$(b_1c_2-b_2c_1)i+(c_1a_2-c_2a_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$ 表示向量积，不满足交换律。这种运算可以推广至 n 维，推广后不满足结合律。一句话，狭义数集只包含复数集。数学之所以完美是因为数学有一个完备的复数系统；复数系统之所以完备是因为它的元素数不仅仅是一个记号，而且源于人类对自然界的抽象，带有宇宙的最基本信息。可见，数学美不是人类构造出来的，而是完美宇宙的真实映象。寻找宇宙的最基本信息是重要的，因为它有助于我们发现表达“适用于一切事物的理论”的数学形式，反过来，我们也可以从宇宙的最基本信息出发去思考宇宙的造化。

参考文献：

1、《数学史概论》〔美〕H.伊夫斯 著 欧阳绛 译 山西人民出版社 1986 年 3 月 458 页

2、《大学数学》 〔美〕E.克拉默 著 舒五昌 周仲良 编译 复旦大学出版社 67—77 页

2/24/2009